Ensino Médio

Matemática

Sumário

Material organizado pelo grupo de professores do NEEJA Vicente Scherer.

Teoria dos conjuntos

A ideia de conjunto é parte da existência humana, porém foi em meados do século XIX que essa ideia ganhou tratamento formal e sistemático por meio dos estudos de Georg Cantor (1845 – 1918), matemático russo criador da Teoria dos Conjuntos.

Considerada uma das mais importantes inovações matemáticas dos últimos séculos, seus conceitos adquiriram forma na simbologia, criada por Cantor, foifundamental para a formulação dos conceitos lógicos, estrutura básica da Lógica, usada constantemente pela computação, responsável pelos grandes avanços tecnológicos do século passado.

Fundamentos da teoria dos conjuntos

Podemos dizer que qualquer agrupamento pode ser denominado conjunto. Um conjunto fica caracterizado quando definimos seus elementos. Simbolicamente, determinamos um conjunto por meio de letras maiúsculas, enquanto seus elementos são separados por vírgulas e colocados entre chaves.

A = {0, 2, 4, 6, 8, 10} definido como sendo o conjunto ***A*** formado pelos seis primeiros números pares.

B= {a, e, i, o, u} definido como sendo o conjunto ***B*** formado pelas cinco vogais do alfabeto.

A determinação de um conjunto pode ser feita de duas maneiras distintas:

1.ª) Designando seus elementos: os elementos de um conjunto são apresentados um a um entre chaves. O exemplo anterior trás as vogais de nosso alfabeto. *B* = {a, e, i, o, u}. Quando o conjunto é formado por um número muito grande de elementos, podemos listar apenas alguns deles dando a ideia do todo. Para exemplificar, tomaremos os números pares positivos menores que 200:*C* = {0, 2, 4, 6, ...,188};

2.ª) Designando uma propriedade de seus elementos: essa propriedade pertence a todos elementos do conjunto e que somente eles possuem. Portanto, um conjunto dos elementos **y** possuidores de uma propriedade **P** será indicado por **y** tal que **y** possui a propriedade **P**. Usamos uma barra vertical para substituir a expressão “tal que”. Assim, podemos dizer que: {y|y possui a propriedade P}. Por exemplo:

A = {y|y é ímpar positivo < 10} → *A* = {1, 3, 5, 7, 9}.

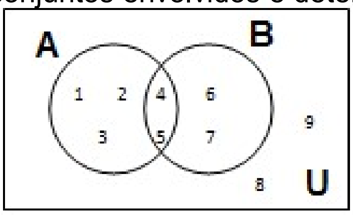
Diagramas

Um conjunto pode ser representado geometricamente por uma linha fechada denominada diagrama de Venn, que nos permite visualizar os conjuntos envolvidos e determinarmos suas relações.

A = {1, 2, 3, 4, 5}

B = {4, 5, 6, 7}

U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}



Verificamos, por exemplo,algumas das relações de pertinência e não-pertinência existentes: 6 ∉ ***A***, 2 ∈ ***A***, 7 ∈ ***B***, 3 ∉***B***, 1 ∈ ***U***, 9 ∈ ***U***.

Conjunto universo

Ao resolvermos um problema em Matemática que envolve conjuntos, devemos admitir a existência de um conjunto universo (*U*). Exemplo:

y – 4 = 9 → y = 9 + 4 → y = 13. Considerando *U* = $\mathbb{Z}$ = {...,– 3, – 2, – 1, 0, 1, ..., 13,...}, sendo S = {13}.

Conjunto unitário

É todo conjunto formado por um único elemento. Exemplo:

Sendo***A*** = {y | y é planeta do sistema Solar que começa com vogal}.

Então ***A*** = {Urano}

Conjunto Vazio

É todo conjunto em que não há elementos. Sua representação é ø ou {}. Lembramos também que o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto. Exemplo:

Sendo ***B*** = {x | x é número par compreendido entre 6 e 8}.

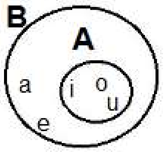
Então ***B*** = ø

Subconjunto

Definimos que um conjunto **A** é um subconjunto de um conjunto***B***, se todo elemento de ***A*** é também elemento de***B***. Podemos então indicar da seguinte forma:

$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B} \Rightarrow \exists\ x \mid x \in \boldsymbol{A} \text{ e } x \in \boldsymbol{B}$

Dizemos então que o conjunto **A** “está contido” ou “incluído” em***B*** e indicamos por $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$.Da mesma forma, podemos dizer que o conjunto***B***“contém” o conjunto***A***,ou seja:$\boldsymbol{B} \supset \boldsymbol{A}$.



O conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos ou partes de um conjunto ***C*** é denominado de conjunto das partes de***C*** e é representado por **P(*C*)**, sendo formado por qualquer conjunto***Y***, desde que $\boldsymbol{Y} \subset \boldsymbol{C}$.

Exemplificando, os subconjuntos do conjunto *B* = {1, 2, 3} são: ø, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3} e {1, 2, 3}, então o conjunto das partes de *B* será:

P(*B*) = {ø, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3} e {1, 2, 3}}

Igualdade de conjuntos

Dois conjuntos ***D*** e ***F*** são iguais se, e somente se, todo elemento que pertence a um deles também pertence ao outro. Representamos por ***D***= ***F***.

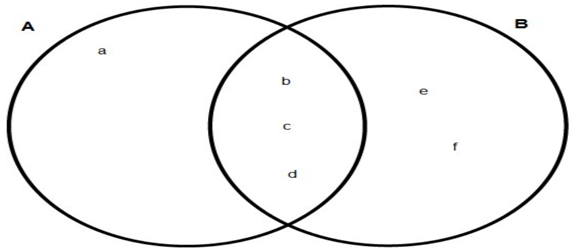
Exemplos: {x | x é natural e y + 2 = 5} = {3}; {a, e, i, o, u} = {i, e, o, u, a}

Operações com conjuntos

Dados os conjuntos:

A = {a, b, c, d}

B= {b, c, d, e, f}



União: é o conjunto formado por todos os elementos de ***A***e ***B***, comuns e não comuns. Representamos por: ***A*** U ***B***. No exemplo temos: ***A*** U ***B***= {a, b, c, d, e, f}.

Intersecção: será o conjunto intersecção de ***A*** e ***B*** o conjunto formado pelos elementos comuns a ***A*** e ***B***. Representamos por: $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$.Noexemplo temos:$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$= {b, c, d}.

Diferença entre conjuntos: será o conjunto diferença entre dois conjuntos ***A*** e ***B*** o conjunto formado pelos elementos de ***A*** que não pertencem a ***B***. Representamos por***A*** – ***B***. No exemplo temos: ***A*** – ***B***= {a}.

Conjunto complementar: quando tivermos dois conjuntos***A*** e ***B***, onde $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{A}$, denominamos conjunto complementar de ***B*** em relação a ***A***, a diferença ***A*** – ***B***. Representamos por $C_A B$. No exemplo temos: $C_A B$=***A*** – ***B***= {a}.

Exercícios:

1. Dados os conjuntos A = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, B = {0, 2, 4} e C = {1, 3, 5}, determinar os seguintes conjuntos:

a) A U B b) A U C c) B U C d) A ∩ B e) A ∩ C f) B ∩ C

2. Dados os conjuntos A = {– 2, – 1, 0, 1, 2}, B = {0, 1, 2} e C = {0, – 1, – 2}, obter os conjuntos:

a) C_AB b) C_AC c) C_BA d) C_CA

3. Dados os conjuntos A = {membrana celular, citoplasma, núcleo}, B = {membrana celular, citoplasma} e C = {núcleo}, escreva os conjuntos:

a) C_AB b) C_AC c) C_BA d) C_CA

4. (UFAL) Se A e B são dois conjuntos não vazios tais que:

A U B = {1, 2, 3,4, 5, 6, 7, 8}, A – B = {1, 3, 6, 7} e B – A = {4, 8}

Então, A ∩ B é o conjunto:

A) ø B) {1, 4} C) {2, 5} D) {6, 7, 8} E) {1, 3,4, 6, 7, 8}

Respostas:

1) a) {0, 1, 2, 3, 4, 5}, b) {0, 1, 2, 3, 4, 5}, c) {0, 1, 2, 3, 4, 5}, d) {0, 2, 4}, e) {1, 3, 5}, f) ø

2) a) {– 2, 2}, b) {– 2, – 1}, c) ø, d) {– 2}

3) a) {núcleo}, b) {membrana celular, citoplasma}, c) ø d) ø

4) Letra C

Número de elementos nas operações com conjuntos

Dados os conjuntos ***A*** e ***B*** não-vazios e suas operações ***A*** U ***B*** e ***A*** ∩ ***B***, teremos:

n(***A***): número de elementos do conjunto ***A***;

n(***B***): número de elementos do conjunto ***B***;

n(***A***U***B***): número de elementos do conjunto ***A***U ***B***e

n(***A*** ∩ ***B***): número de elementos do conjunto ***A*** ∩ ***B***.

Assim, devemos considerar a seguinte relação:

n(***A*** U ***B***) = n[(***A***) + n(***B***) – n(***A*** ∩***B***)]

Exemplo: Em uma prova de vestibular caíram apenas duas questões e sabe-se que:

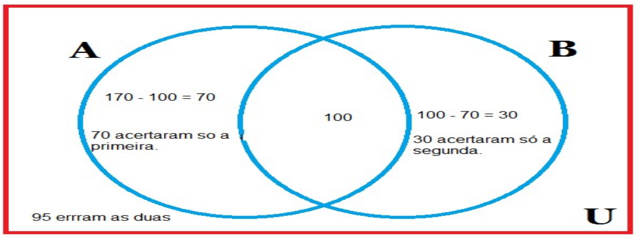
100 vestibulandos acertaram as duas questões,

170 vestibulandos acertaram a 1ª questão,

100 vestibulandos acertaram apenas uma das questões,

95 vestibulandos erraram as duas questões.

Qual o número de vestibulandos que prestaram a prova de vestibular?



100 vestibulandos acertaram as duas questões,

70 vestibulandos acertaram a 1ª questão,

30 vestibulandos acertaram a 2ª questão,

95 vestibulandos erraram as duas questões.

Total de vestibulandos:295 vestibulandos prestaram a prova.

Exercício:

1. Em uma escola há *n* alunos. Sabe-se que 56 alunos leem o jornal **A**, 21 leem os jornais **A** e **B**, 106 leem apenas um dos dois jornais e 66 não leem o jornal **B**. Calcule o valor de *n*. (use o diagrama de Venn).

$\boxed{n= 158}$

Conjuntos numéricos

A organização dos conjuntos numéricos é resultado da evolução científica que, estando em constante desenvolvimento, sofre inovações resultantes das necessidades de adaptação do homem ao seu mundo.

A organização dos números no passar da história obedece à seguinte ordem:

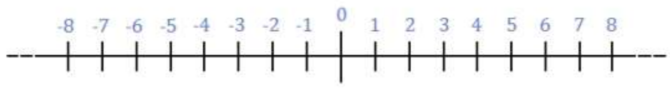
Conjunto dos números naturais($\mathbb{N}$): são aqueles números que surgiram gradativa e naturalmente pela necessidade de contagem das civilizações. O número zero nasceu para representar a ideia de "não-existência", passando a ser aceito como número natural.

São, portanto, dez os algarismos que combinados representam as necessidades da numeração escrita e a solução para os problemas de operações matemáticas. Sua representação fundamental é 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 deles decorrendo todos os demais números naturais.

$\mathbb{N}$= {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,...}

$\mathbb{N}$* = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, onde o sinal * significa que o zero foi excluído do conjunto.

Conjunto dos números inteiros($\mathbb{Z}$): sabemos que para cada número positivo existe um correspondente negativo, portanto números inteiros são todos os números positivos, seus opostos e o zero. Observamos melhor por meio da reta dos números.



Sua representação é $\mathbb{Z}$ = {..., – 2, – 1, 0, 1, 2, ...}, mas podemos ter também:

$\mathbb{Z}_+^*$ = {1, 2, 3, ...} $\mathbb{Z}_-^*$= {..., – 3, – 2, – 1} $\mathbb{Z}_+$= {0, 1, 2, ...}

$\mathbb{Z}_-$ = {..., – 2, – 1, 0}.

Observação: O módulo ou valor absoluto de um número inteiro é a distância deste até o zero. Indicamos o módulo de um número por ||. Na reta anterior, o número – 2 está distante duas unidades de medida do zero e o número + 3 está distante três unidades de medida do zero, assim a distância entre ambos é dada por: |– 2| = 2 e |+ 3| = 3, logo 2 + 3 = 5 unidades de medida.

Conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$): é racional todo o número que pode ser colocado na forma de fração $\frac{p}{q}$, em que p e q devem ser números inteiros e q $\neq$de 0.

Sua representação é $\mathbb{Q}$.

Podemos exemplificar por {..., – 2, – 1,– $\frac{1}{2}$, 0, 1, 2, $\frac{5}{2}$, 3, $\frac{18}{5}$,...}, também os números decimais cujos denominadores são múltiplos de 10 e as dízimas periódicas, que podem ser escritas na forma de fração, chamada de fração geratriz.

Também são representações dos racionais:

$\mathbb{Q}_+^*$ = {1, 2, $\frac{5}{2}$, 3, $\frac{7}{2}$,5, ...} $\mathbb{Q}_-^*$ = {..., – 2, – 1,– $\frac{1}{2}$} $\mathbb{Q}_+$ = {0, 1, 2, $\frac{5}{2}$, ...} $\mathbb{Q}_-$ = {...,– $\frac{9}{5}$, – $\frac{3}{2}$, – 1, – $\frac{1}{2}$, 0}

Conjunto dos números irracionais ($\mathbb{I}$): é irracional todo o número que não pode ser escrito na forma de fração $\frac{p}{q}$, em que p e q $\in\mathbb{Z}$ e q $\neq$ 0. Observe que $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$.

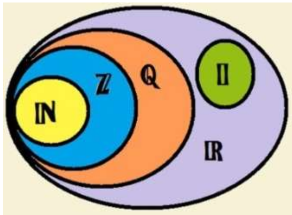
Representamos por $\mathbb{I}$.

Exemplos de números irracionais:{..., – $\sqrt{3}$,– $\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{11}}{2}$, $\sqrt{7}$, 2,761, 3,14...}

Conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$): é formado pela reunião de todos os conjuntos apresentados anteriormente. Sua representação é $\mathbb{R}$.

Exemplos: {..., – 10, – 3, – $\sqrt{2}$, – 1, – $\frac{1}{2}$, 0, 1, 5, $\frac{18}{3}$, $\sqrt{15}$,...}

Por meio do diagrama de Venn, representamos os conjuntos como:



Intervalos reais

São considerados subconjuntos dos números reais, indicados por desigualdades, chamados intervalos numéricos. Se considerarmos dois números reais *a* e *b*, podemos ter:

Intervalo aberto de extremos *a* e *b*

]*a*, *b*[= {x ∈ $\mathbb{R}$| *a*<x <*b*}, geometricamente representamos:

Intervalo fechado de extremos *a* e *b*

[*a*, *b*] = {x ∈ $\mathbb{R}$| *a* ≤ x≤ *b*}, geometricamente representamos:

Intervalo fechado à esquerda (ou aberto à direita)

[*a*, *b*] = {x ∈ $\mathbb{R}$| *a* ≤ x<*b*}, geometricamente representamos:

Intervalo fechado à direita (ou aberto à esquerda)

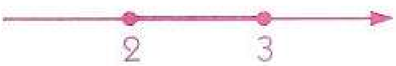
]*a*, *b*] = {x ∈ $\mathbb{R}$| *a*<x ≤ *b*}, geometricamente representamos:

Intervalos com união e intersecção

Aplicando as definições de união e intersecção de conjuntos, podemos representar graficamente os intervalos, projetando-os sobre um mesmo eixo. Vejamos os exemplos a seguir:

1) [1, 3] U [2, 5]

2) [1, 3] ∩ [2, 5]



3)]– 1, 4] U [3, 7]

4) [1, 3] ∩]– α, 6]

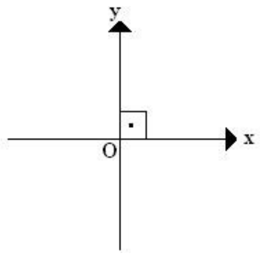
Sistema cartesiano ortogonal

Duas retas que se cruzam formando um ângulo de 90^{o} são chamadas de retas perpendiculares. O sistema cartesiano ortogonal é o resultado da perpendicularidade dessas duas retas. As duas retas são chamadas de eixos:

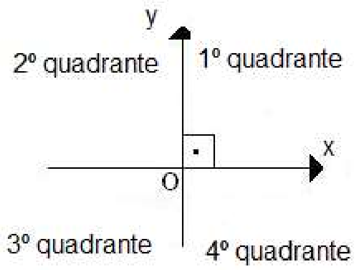
Eixo das abscissas – reta x

Eixo das ordenadas – reta y

O ponto de encontro das duas retas x e y denominamos ponto de origem (0; 0). Os valores de x e y valem 0 (zero). Sua representação é:



Sendo que cada uma das quatro partes são denominadas de quadrantes.



Par ordenado

Denominamos par ordenado os números reais **a** e**b**, dispostos nas retas perpendiculares do sistema ortogonal, obedecendo à seguinte ordem: **a** sobre o eixo ***x*** (abscissa) e **b** sobre o eixo ***y*** (ordenada).

Propriedade: dois pares ordenados são iguais se, e somente se, $x = a$ e $y = b$.

$(x; y) = (a; b) \leftrightarrow x = a \text{ e } y = b$

Exemplos:

1) Calcule x e y de modo que os pares ordenados sejam iguais: $(x; y) = (-4; 6)$

Assim, $x = -4$ e $y = 6$

2) Calcule x e y de modo que os pares ordenados sejam iguais: $(x + 3; y) = (6; 2y - 8)$

Assim, $x + 3 = 6 \rightarrow x = 6 - 3 \rightarrow x = 3$ e $y = 2y - 8 \rightarrow y - 2y = -8 \rightarrow -y = -8 \rightarrow y = 8$

Produto de dois conjuntos (*A* x*B*)

O produto de dois conjuntos não-vazios é denominado produto cartesiano de ***A***por ***B,*** indicado por ***A*** x ***B***, formado por todos os pares ordenados, nos quais o primeiro elemento pertence ao conjunto ***A*** e o segundo elemento pertence ao conjunto ***B***. Temos:

$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \{(x; y) \mid x \in \boldsymbol{A} \text{ e } y \in \boldsymbol{B}\}$

Exemplos:

1) Dados os conjuntos $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$, então $A \times B = \varnothing$

2) Dados os conjuntos $A = \{0, 2, 3, 5, 6\}$ e $B = \{2, 5\}$, determine A x B, B x A e B^2

$A \times B = \{(0;2), (0; 5), (2; 2), (2; 5), (3; 2), (3; 5), (5; 2), (5; 5), (6; 2), (6; 5)\}$

$B \times A = \{(2; 0), (2; 2), (2; 3), (2; 5), (2; 6), (5; 0), (5; 2), (5; 3), (5; 5), (5; 6)\}$

B^2 = B x B = {(2; 2), (2; 5), (5; 2), (5; 5)}

Observe que o produto do número de termos dos conjuntos dados corresponde ao número de pares ordenados encontrados em cada produto:

A x B = 5 x 2 = 10; B x A = 2 x 5 = 10 e B x B =2 x 2 = 4

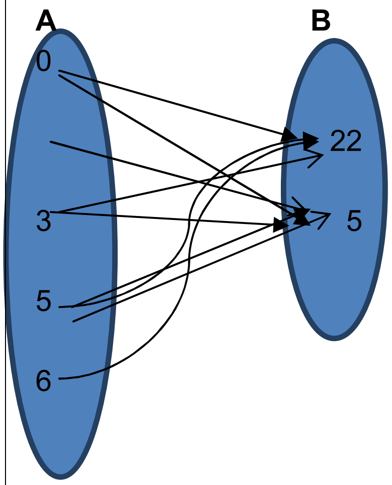
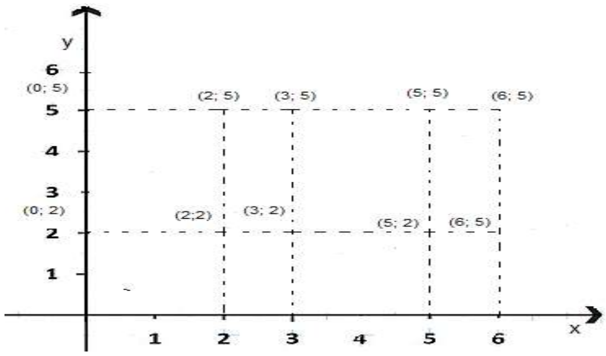


Diagrama de flechas

Diagrama cartesiano (todos os pares)



Relação binária

Considerando dois conjuntos ***A*** e ***B***, não-vazios, determinamos relação binária de ***A*** em ***B***, qualquer subconjunto do produto cartesiano ***A*** x ***B***. Então *R*⊂***A*** x ***B***.

Exemplo: Dados os conjuntos A = {3, 5, 6, 9} e B = {1, 3, 4, 6}, determine as seguintes relações de A em B:

A x B ={(3; 1), (3; 3); (3; 4), (3; 6), (5; 1), (5; 3), (5; 4), (5; 6), (6; 1), (6; 3), (6; 4), (6; 6), (9; 1), (9; 3), (9; 4), (9; 6)}

a) R_1 = {(x; y) ∈*A* x *B*| x – y = 3} → R_1 = {(6; 3), (9; 6)}

b) R_2 = {(x; y) ∈*A* x *B*| y é múltiplo de x} → R_2 = {(3; 3), (3; 6), (6; 6)}

c) R_3 = {(x; y) ∈*A* x *B*| x é número primo} → R_3 = {(3; 1), (3; 3), (3; 4), (3; 6), (5; 1), (5; 3), (5; 4), (5; 6)}

Domínio e imagem de uma relação binária

Domínio de uma relação binária (*R*) é o conjunto de todos os primeiros elementos dos pares ordenados (x; y) que pertencem a *R*.

Imagem de uma relação binária (*R*) é o conjunto de todos os segundos elementos dos pares ordenados (x; y) que pertencem a *R*.

Exemplo:

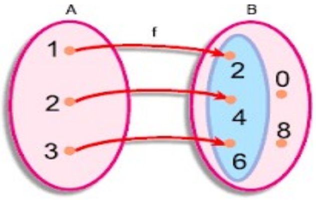
Dados os conjuntos A = {1, 2, 3}, B = {0, 2, 4, 6, 8} e a relação R = {(x; y) ∈ A x B| y = 2x}

D(R) = {1, 2, 3}

Im(R) = {2, 4, 6}

D(R) = A

Im(R) ⊂B



Função do 2º grau

Chamamos de função do 2º grau ou função quadrática a função de domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $\mathbb{R}$, expressa por $f(x) = ax^2 + bx + c$, na qual a, b e c são números pertencentes aos reais e $a \neq 0$.

Exemplo:

$f(x) = x^2 + 5x - 3$, onde a = 1, b = 5 e c = – 3

$f(x) = -3x^2 + 8x + 2$, onde a = – 3, b = 8 e c = 2

Módulo de um número real

No nosso dia a dia não estamos acostumados a utilizar números negativos, e sim palavras que os simbolizam. Quando tratamos de saldo de uma conta bancária dizemos que o saldo está devedor, da temperatura num dia muito frio, que está negativa ou abaixo de zero, etc.

Assim, o módulo ou valor absoluto de um número real é consequência do desenvolvimento teórico dos números inteiros. Percebemos na reta dos números inteiros a correspondência simétrica entre um número positivo e um número negativo, pois geometricamente, por exemplo, a distância do número até a origem.

Exemplos:

1) $|-2 + 6| = |4| = 4$
2) $|-5 - 1| = |-6| = 6$
3) $|-3| - |5| = 3 - 5 = -2$
4) $|-1| + |5| - |6| = 1 + 5 - 6 = 0$
5) $-|-8| = -8$
6) $|-1 - 3| = |-4| = 4$

Equações modulares

Para a resolução de equações modulares devemos seguir as seguintes propriedades:

1) se $a > 0$ $|x| = a \leftrightarrow x = a$ ou $x = -a$

2) se $|a| = |b| \leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$

Exemplos:

1) Resolva a equação $|x - 3| = 1$

$x - 3 = 1 \rightarrow x = 1 + 3 \rightarrow x = 4$ ou $x - 3 = -1 \rightarrow x = -1 + 3 \rightarrow x = 2$ Solução: {2, 4}

2) Resolva a equação $|x - 4| = |2x - 3|$

$x - 4 = 2x - 3$ ou $x - 4 = -(2x - 3)$

$x - 2x = -3 + 4 \rightarrow -x = 1 \rightarrow x = -1$ ou

$x - 4 = -2x + 3 \rightarrow x + 2x = 3 + 4 \rightarrow 3x = 7 \rightarrow x = \frac{7}{3}$ Solução: $\{-1, \frac{7}{3}\}$

Equações exponenciais

Toda equação em que o expoente for uma incógnita será denominada de equação exponencial.

Exemplos:

1) $4^x = 64 \Rightarrow 4^x = 4^3 \Rightarrow x = 3$

2) $5^{x-5} = 25 \Rightarrow 5^{x-5} = 5^2 \Rightarrow x - 5 = 2 \Rightarrow x = 2 + 5 \Rightarrow x = 7$

3) $3^x = \sqrt[4]{27} \Rightarrow 3^x = \sqrt[4]{3^3} \Rightarrow 3^x = 3^{\frac{3}{4}} \Rightarrow x = \frac{3}{4}$

4) $2^{3x-1} = 32^{2x} \Rightarrow 2^{3x-1} = (2^5)^{2x} \Rightarrow 3x - 1 = 10x \Rightarrow 3x - 10x = 1 \Rightarrow -7x = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{7}$

5) $(3^x)^{x-1} = 729 \Rightarrow (3^x)^{x-1} = 3^6 \Rightarrow x(x-1) = 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x' = 3$ e $x'' = -2$

6) $2^{2x} + 2 \cdot 2^x - 8 = 0$ (Para este tipo de equação é necessário fazer antes uma transformação).
$(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 8 = 0$, fazendo $2^x = y$ (equação auxiliar), teremos:

$y^2 + 2 \cdot y - 8 = 0$ ($a = 1$; $b = 2$ e $c = -8$) $\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) \Rightarrow \Delta = 36$

$= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow y = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2.1} \Rightarrow y = \frac{-2 \pm 6}{2} \Rightarrow y' = \frac{4}{2} \Rightarrow y' = 2$; $y'' = \frac{-8}{2} \Rightarrow y'' = -4$

Voltando aos valores da equação auxiliar $2^x = y$, obteremos os valores de x, respostas de nossa primeira equação:

$2^x = 2 \Rightarrow 2^x = 2^1 \Rightarrow x = 1$ e

$2^x = -4 \Rightarrow$ não existe valor para x, pois potência de base positiva é sempre positiva. Solução {1}.

Sequência ou sucessão

Podemos observar situações cotidianas como o calendário dividido em meses, semanas e dias, as quatro fases da Lua apresentadas sempre na mesma ordem, as cores do arco-íris etc.

Observações como essas nos permitem dizer que sequência ou sucessão é o conjunto formado por elementos considerados numa certa ordem. Essa ordem será representada considerando a posição que cada elemento ocupa dentro da sequência da seguinte forma:

a_1(primeiro termo), a_2 (segundo termo), a_3 (terceiro termo), ..., a_n (enésimo termo), na qual o enésimo termo (n) pertence ao conjunto dos naturais excluído o zero ($\mathbb{N}^*$).

Quando observamos a sequência dos números naturais pares (0, 2, 4, 6, ...), podemos fazê-la da seguinte maneira: $a_n = 2n - 2$.

$a_1 = 2 \cdot 1 - 2 \Rightarrow a_1 = 0$;

$a_2 = 2 \cdot 2 - 2 \Rightarrow a_2 = 2$;

$a_3 = 2 \cdot 3 - 2 \Rightarrow a_3 = 4$;

$a_4 = 2 \cdot 4 - 2 \Rightarrow a_4 = 6$;

e assim por diante.

Para os números naturais ímpares (1, 3, 5, 7, ...), podemos fazê-la da seguinte forma: $a_n = 2n - 1$.

$a_1 = 2 \cdot 1 - 1 \Rightarrow a_1 = 1$;

$a_2 = 2 \cdot 2 - 1 \Rightarrow a_2 = 3$;

$a_3 = 2 \cdot 3 - 1 \Rightarrow a_3 = 5$;

$a_4 = 2 \cdot 4 - 1 \Rightarrow a_4 = 7$;

e assim por diante.

Exemplos:

1) Determine os três primeiros termos da sequência cujo termo geral é $a_n = n^3 + 2$.

$a_1 = 1^3 + 2 \Rightarrow a_1 = 1 + 2 \Rightarrow a_1 = 3$

$a_2 = 2^3 + 2 \Rightarrow a_2 = 8 + 2 \Rightarrow a_2 = 10$

$a_3 = 3^3 + 2 \Rightarrow a_3 = 27 + 2 \Rightarrow a_1 = 29$

2) Obter o décimo quarto termo da sequência em que $a_n = 2^{10 - n}$

$a_{14} = 2^{10 - 14} \Rightarrow a_{14} = 2^{-4} \Rightarrow a_{14} = \frac{1}{16}$

3) Determine a lei de formação da sequência (4, 8, 12, 16, 20, ...)

$a_n = 4n$, pois: $a_1 = 4$ $(4 \cdot 1 = 4)$; $a_2 = 8$ $(4 \cdot 2 = 8)$; $a_3 = 12$ $(4 \cdot 3 = 12)$; ...

Dessa maneira o termo geral de uma sequência é representado por ($\mathbf{a_n}$).

Progressão aritmética

Será uma progressão aritmética toda a sequência que cada termo a partir do segundo for igual à soma do seu antecessor com uma constante.

Portanto: $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = ... = a_n - a_{n-1} = r$ (razão)

As progressões aritméticas podem ser crescentes ($r > 0$), constantes ($r = 0$) e decrescentes ($r < 0$).

Fórmula dos termos geral de uma P.A.: $\mathbf{a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r}$, onde: $\mathbf{a_n}$ = termo geral, $\mathbf{a_1}$ = primeiro termo, **n** = número de termos e **r** = razão.

Exemplos:

1) Sabe-se que o 5º termo de uma P.A. é 18 e que a sua razão é r = 7, calcule o valor do 1º termo.

$a_1 = ?$

$r = 7$

$a_5 = 18$

$n = 5$

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

$18 = a_1 + (5 - 1) \cdot 7$

$18 = a_1 + 4 \cdot 7$

$18 = a_1 + 28$

$18 - 28 = a_1$

$a_1 = -10$

2) Determine o valor de x, sabendo que $(x^2, x + 5, 3x + 4)$ é P.A.

$a_1 = x^2$

$a_2 = x + 5$

$a_3 = 3x + 4$

$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2$

$(x + 5) - x^2 = (3x + 4) - (x + 5)$

$x + 5 - x^2 = 3x + 4 - x - 5$

$-x^2 + x + 5 - 2x + 1 = 0$

$-x^2 - x + 6 = 0$

$(a = -1, b = -1 \text{ e } c = 6)$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6 \Rightarrow \Delta = 1 + 24 \Rightarrow \Delta = 25$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot (-1)} \Rightarrow x = \frac{1 \pm 5}{-2} \Rightarrow x' = \frac{6}{-2} \Rightarrow x' = -3;$ $\quad x'' = \frac{-4}{-2} \Rightarrow x'' = 2$

3) Calcule a razão **r**, sabendo que $a_{15} = 82$ e $a_1 = 12$.

$a_1 = 12$

$n = 15$

$a_{15} = 82$

$r = ?$

$a_n = a_1 + (n – 1) \cdot r$

$82 = 12 + (15 – 1) \cdot r$

$82 – 12 = 14 \cdot r$

$\frac{70}{14} = r = 5$

4) Calcule quantos múltiplos de 5 existem entre 50 e 800.

$a_1 = 50$

$a_n = 800$

$r = 5$

$n = ?$

$a_n = a_1 + (n – 1) \cdot r$

$800 = 50 + (n – 1) \cdot 5$
$800 – 50 = (n – 1) \cdot 5$
$\frac{750}{5} = n – 1$
$150 + 1 = n = 151$

5) Determine uma P.A., sabendo que a soma do 2º e do 10º termos é 24 e a diferença do 8º com o 5º termos é 6.
$a_2 + a_{10} = 24$
$a_8 – a_5 = 6$
$a_1 + r + a_1 + 9r = 24$
$a_1 + 7r – (a_1 + 4r) = 6$
$2a_1 + 10r = 24$
$a_1 + 7r – a_1 – 4r = 6$
$2a_1 + 10 r = 24$
$3r = 6 \Longrightarrow r = 2$
$2a_1 + 10 \cdot 2 = 24$
$2a_1 + 20 = 24$
$2a_1 = 24 – 20$
$2a_1 = 4$
$a_1 = \frac{4}{2} \Longrightarrow a_1 = 2$

PA = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}

Interpolar aritmeticamente
Significa inserir termos entre termos já existentes, construindo assim uma P.A., conhecendo sua razão.
Exemplo: Quantos números devem ser interpolados entre 8 e – 48 de modo que a razão seja igual a – 4?
$a_1 = 8$

$a_n = – 48$

$r = – 4$

$n = ?$

$a_n = a_1 + (n – 1) \cdot r$

$– 48 = 8 + (n – 1) \cdot (– 4)$

$– 48 – 8 = (n – 1) \cdot (– 4)$ $14 + 1 = n = 15$ elementosmenos os extremos = 13 elementos.

$\frac{-56}{-4} = n - 1$

Soma dos termos de uma P.A.

Numa progressão aritmética finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

$$\mathbf{S_n = \frac{(a_1 + a_n) \, . \, n}{2}}$$

Exemplo:

1) Calcule a soma dos doze primeiros termos da P.A. (– 3, – 1, 1, 3, ...)

$a_1 = -3$

$a_n = ?$

$n = 12$

$r = 2$

$S_n = ?$

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

$a_n = -3 + (12 - 1) \cdot 2$

$a_n = -3 + 11 \cdot 2$

$a_n = -3 + 22$

$a_n = 19$

$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \, . \, n}{2}$

$S_n = \frac{(-3 + 19) \, . \, 12}{2}$

$S_n = \frac{16 \, . \, 12}{2}$

$S_n = \frac{192}{2} \Rightarrow S_n = 96$

Exemplos:

1) Determine a soma dos dezoito primeiros termos da P.A. (1, 4, 7, ...).

$a_1 = 1$

$a_{18} = ?$

$n = 18$

$r = 3$

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

$a_n = 1 + (18 - 1) \cdot 3$

$a_n = 1 + 17 \cdot 3$

$a_n = 1 + 51$

$a_n = 52$

$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \, . \, n}{2}$

$S_n = \frac{(1 + 52) \, . \, 18}{2}$

$S_n = \frac{53 \, . \, 18}{2}$

$S_n = \frac{954}{2} \Rightarrow S_n = 477$

2) Qual é a soma dos múltiplos de 7 compreendidos entre 20 e 1.000?

a_1= 21; r = 7; a_n = 994(para encontrar: 1 000 **:** 7 = 142, 85... ≅ 143 · 7 = 1 001 – 7 = 994) e n = ?

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

$994 = 21 + (n - 1) \cdot 7$

$994 - 21 = (n - 1) \cdot 7$

$\frac{973}{7} = n - 1$

$139 + 1 = n = 140$

$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

$S_n = \frac{(21 + 994) \cdot 140}{2}$

$S_n = 1.015 \cdot 70$

$S_n = 71.050$

Progressão geométrica

Definimos progressões geométricas como sendo as sequências de números reais, em que o quociente entre cada termo e o termo anterior, a partir do segundo termo, é uma constante **q** chamada razão da progressão geométrica.

Assim, para que a sequência (a_1, a_2, a_3, ..., a_n) seja uma P.G. $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}, ..., \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$.

As progressões geométricas podem ser:

- crescentes, quando:$a_1 > 0$ e $q > 1$ e $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$;
- constantes, quando todos os termos forem iguais;
- oscilantes, quando cada termo tem sinal contrário ao do seu anterior; e
- decrescentes, quando:$a_1 > 0$ e $0 < q < 1$ e $a_1 < 0$ e $q > 1$.

Exemplos:

1) Verificar se as sequências a seguir são progressões geométricas:

a) (2, 6, 18, 54, 162)

$\frac{6}{2} = \frac{18}{6} = \frac{54}{18} = \frac{162}{54} = q = 3$

b) $(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27})$

$\frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{27}}{\frac{1}{9}} = q = \frac{1}{3}$

c) $(27, -9, 3, -1, \frac{1}{3})$

$\frac{-9}{27} = \frac{3}{-9} = \frac{-1}{3} = q = -\frac{1}{3}$

Fórmula do termo geral de uma progressão geométrica

Sendo uma P.G. a sequência: (a_1, a_2, a_3, ..., a_n) e sua razão (q) = $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}, ..., \frac{a_n}{a_{n-1}}$, podemos dizer que:

$a_2 = a_1 \cdot q$

$a_3 = a_1 \cdot q^2$

$a_4 = a_1 \cdot q^3$

...$\mathbf{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$

Conhecendo o primeiro termo (**a_1**) e a razão (**q**) de uma P.G., pela fórmula do termo geral podemos calcular qualquer um dos termos da P.G.

Exemplo:

1) Calcule o sétimo termo de uma P.G. sabendo que $\left(\frac{3}{2},\ 1,\ \frac{2}{3}, \ldots\right)$

$a_1 = \frac{3}{2}$

$n = 7$

$q = \frac{2}{3}$

$a_7 = ?$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_7 = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{7-1}$

$a_7 = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{6}$

$a_7 = \frac{3}{2} \cdot \frac{64}{729}$ (simplificando)

$a_7 = \frac{32}{243}$

2) Calcule o primeiro termo de uma P.G., cujo décimo termo é 243 e a razão, 3.

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$243 = a_1 \cdot 3^{10-1} \Rightarrow 3^5 = 3^9 \cdot a_1 \Rightarrow \frac{3^5}{3^9} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3^4} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{81}$

Interpolação geométrica

Interpolar significa inserir, colocar entre dois termos já pertencentes à P.G.

Exemplo:

1) (ACAFE-SC) Interpolando cinco meios geométricos entre 2 e 1.458, obtém-se como termo médio o número:

A) 162

B) 18

C) 54

D) 1.230

E) 486

$a_1 = 2 a_n = 1.458$

$n = 7 q = ?$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$1.458 = 2 \cdot q^{7-1}$

$1.458 = 2 \cdot q^6$

$\frac{1.458}{2} = q^6 \Rightarrow q = \sqrt[6]{729} \Rightarrow q = \sqrt[6]{3^6} \Rightarrow q = 3$

2, 6, 18,**54**,162, 486, 1.458

Resposta: letra C

Exercícios:

1) Calcule a razão de uma P.G. de seis termos, cujos termos extremos são 3 e 96.

2) (CESGRANRIO)Se **x** e **y** são positivos e se **x**, **xy**, **3x** estão, nesta ordem, em P.G., então, o valor de **y** é:

A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) $\sqrt{3}$ D) 3 E) 9

3) Interpolar quatro meios geométricos entre $\frac{1}{18}$ e 432.

4) Calcule o produto *xy* na P.G. (5, x, 45, y, 405)

5) (ACAFE-SC) A soma dos oito primeiros termos da P.G. (16, 8, 4, ...)

A) $\frac{255}{256}$ B) $-\frac{255}{256}$ C) $\frac{255}{8}$ D) $\frac{255}{16}$ E) $-\frac{255}{16}$

6) (F.M. SANTOS-SP) Em uma P.G., a_8 = 324 e q = 2. Determine a soma dos nove primeiros termos.

A) 2 000 B) 1 533 C) 1 615 D) 1 213 E) 1 159

7) (ITA-SP) Dada a P.G. $\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ ...\right)$, a soma dos seus infinitos termos é:

A) $\frac{1}{8}$ B) 2 C) $1 + \frac{1}{2^n}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 3

1) q = 2	2) B	3) $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{3}$, 2, 12, 72, 432	4) 2.025	5) C	6) E	7) B

Trigonometria

Podemos destacar a importância do estudo da trigonometria, que tem origem grega e é formada por*tri* = três, *gonos* = ângulos e*metria* = medida, ou seja, é a medida de três ângulos. Seu desenvolvimento esteve relacionado ao da Astronomia cuja necessidade de estudar os astros, as fases da lua, os eclipses, a distância entre planetas permitiram grande auxilio na definição de rotas das navegações e, como consequência, a expansão territorial.

Triângulo retângulo e seus elementos

Definimos triângulo retângulo como sendo aquele que possui um ângulo interno reto (90º). Formado por três lados, sendo o lado oposto ao ângulo reto denominado hipotenusa e os lados que formam o ângulo reto denominados catetos.

Na figura a seguir, podemos identificar os elementos que formam um triângulo retângulo.

a = hipotenusa,

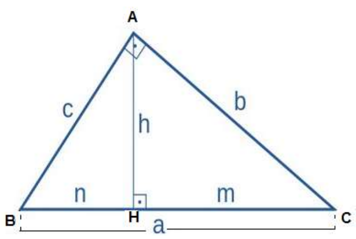
b = cateto maior,

c = cateto menor,

h = altura,

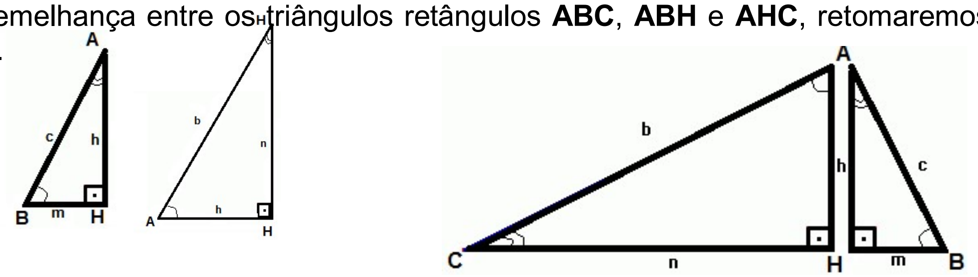
m = projeção do cateto **c** sobre a hipotenusa,

n = projeção do cateto **b** sobre a hipotenusa.



Relações métricas no triângulo retângulo

Por meio da semelhança entre os triângulos retângulos **ABC**, **ABH** e **AHC**, retomaremos as principais relações métricas.



1.ª) $c^2 = m \cdot a$ e $b^2 = n \cdot a$

A medida de cada cateto é média proporcional entre a medida de sua projeção sobre a hipotenusa e a medida da hipotenusa.

2.ª) b · c = a · h

O produto das medidas dos catetos é igual ao produto da medida altura e da hipotenusa.

3.ª) h^2 = m · n

A altura relativa à hipotenusa é media proporcional entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

4.ª) $a^2 = b^2 + c^2$

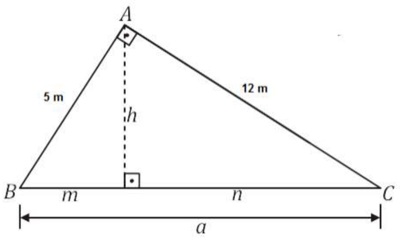
Teorema de Pitágoras: o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

5.ª) Os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são complementares, pois somando a medida (A$\hat{B}$C) com a medida (A$\hat{C}$B) resulta 90º.

med (A$\hat{B}$C) + med (A$\hat{C}$C) = 90º.

Exemplos:

1) Na figura, calcule**a**, **h,m**e**n.**



$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 = 12^2 + 5^2$

$a^2 = 144 + 25$

a = $\sqrt{169}$

a = 13 m

b · c = a · h

12 · 5 = 13 · h

$\frac{60}{13}$ = h ≅ 4,6 m

c^2 = m · a

5^2 = m · 13

$\frac{25}{13}$ = m ≅ 1, 9 m

b^2 = n · a

12^2 = n · 13

$\frac{144}{13}$ = n ≅ 11,1 m

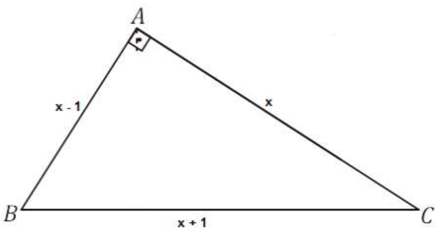
2) Num triângulo retângulo, os lados têm medidas x – 1, x e x + 1. Determine essas medidas.

$(x + 1)^2 = (x - 1)^2 + x^2$

$x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2x + 1 + x^2$

$x^2 - 2x^2 + 2x + 2x + 1 - 1 = 0$

$-x^2 + 4x = 0$ (a = – 1 e b = 4)

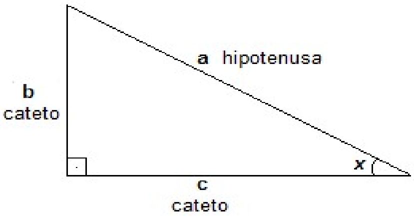


Equação do 2º grau incompleta.

x ·(– x + 4) =0
x = 0 e
– x = – 4
x = 4
x – 1 = 4 – 1 = 3
x + 1 = 4 + 1 = 5
x =4

Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Num triângulo retângulo, o ângulo reto (90º) é aquele formado pelos dois lados denominados catetos e a hipotenusa é o lado oposto a este ângulo de 90º. Sabendo identificar os lados será possível definir as três razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente.



seno $= \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$ ex.: sen $x = \frac{b}{a}$

cosseno $= \dfrac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$ ex.: cos $x = \frac{c}{a}$

tangente $= \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$ ex.: tan $x = \frac{b}{c}$

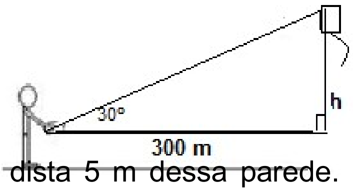
Os ângulos notáveis são 30º, 45º e 60º. Apresentamos a seguir uma tabela com os valores do seno, cosseno e tangente desses ângulos que possibilitaram a resolução dos exercícios envolvendo razões trigonométricas.

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

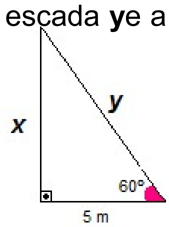
Exemplos:

1) Um garoto está empinando uma pipa, e o fio forma com a horizontal um ângulo de 30º. Calcule a que altura do solo se achará a pipa quando estiver na vertical que passa por uma árvore situada a 300 m do garoto. Sabe-se que tan 30º = $\frac{\sqrt{3}}{3} \cong 0{,}57$

tan 30º = $\frac{h}{300} \Rightarrow$ 0,57 · 300 = h ⟹h = 171 m



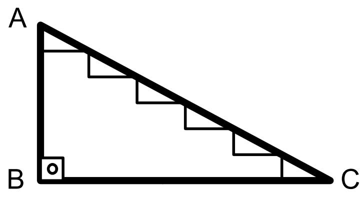
2) Uma escada acha-se apoiada em uma parede e sua base dista 5 m dessa parede. O ângulo que a escada forma com o plano horizontal é de 60º. Calcule o comprimento da escada **y**e a distância **x** do chão até a extremidade superior. Use cos 60º = $\frac{1}{2}$ e sen 60º = $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



cos 60º = $\frac{5}{y} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{5}{y} \Rightarrow$ y = 10 m

sen 60º = $\frac{x}{10} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{10} \Rightarrow \sqrt{3} \cdot 10 = 2 \cdot x \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} . 10 = x \Rightarrow x = 5 \cdot \sqrt{3}$m

3) (Vunesp-SP) A figura representa o perfil de uma escada cujos degraus têm todos a mesma extensão e a mesma altura. Se AB = 2 m e BĈA mede 30º, então a medida da extensão de cada degrau é:



A) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

C) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

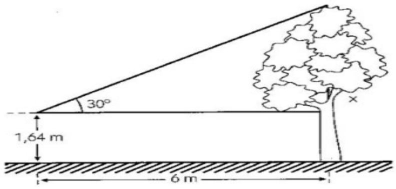
E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

tan 30º = $\frac{2}{\overleftrightarrow{BC}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \overleftrightarrow{BC} = 2 \Rightarrow \overleftrightarrow{BC} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow \overleftrightarrow{BC} = 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} \Rightarrow \overleftrightarrow{BC} = \frac{6}{\sqrt{3}} \Rightarrow \overleftrightarrow{BC} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \overleftrightarrow{BC} = 2 \cdot \sqrt{3}$

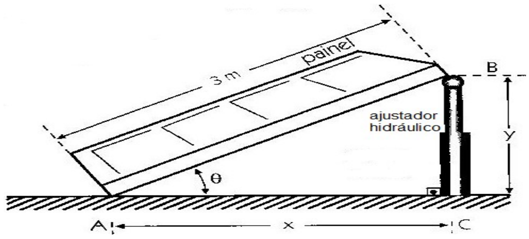
$\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ Resposta: letra E.

Exercícios:
1) Uma escada faz um ângulo de 30º com a parede vertical de um prédio, ao tocar o topo distante 6 m do solo. Determine o comprimento da escada.

2) Uma pessoa de 1,64 m de altura observa o topo de uma árvore sob o ângulo de 30º com a horizontal. Conhecendo a distância de 6,0 m do observador até a árvore, calcular a altura da árvore. Considere tg = 30º = 0,58.



A figura ao lado mostra um painel de 3 m de largura equipado com um ajustador hidráulico. À medida que o sol se eleva, o painel é ajustado automaticamente de modo que os raios de sol incidam perpendicularmente nele.



Considere esse enunciado para responder as três questões seguintes:

3) Determine o valor de y (em metros) em função de θ:
A) y = 3 senθ
B) y = 3 senθ + 3
C) y = 3 tgθ
D) y = 3 cosθ
E) impossível de ser determinado.

4) Para θ = 60º, o valor de y (em metros) é:
A) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

B) $\frac{3}{2}$

C) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

D) 3

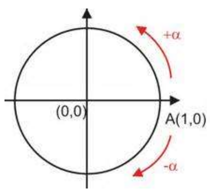
E) 6

5) Para θ = 60º, o valor de x (em metros) é:
A) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
B) $\frac{5}{2}$
C) $\frac{3}{2}$
D) 6
E) 3

1) 4 $\sqrt{3}$	2) h = 5,12 m	3) A	4) A	5) C

Circunferência trigonométrica

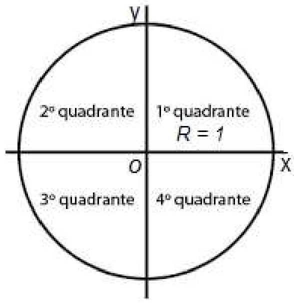
O valor de uma razão trigonométrica está associado ao valor de um arco, e a relação existente entre a razão trigonométrica e o arco é chamada de função trigonométrica.
Quanto à orientação



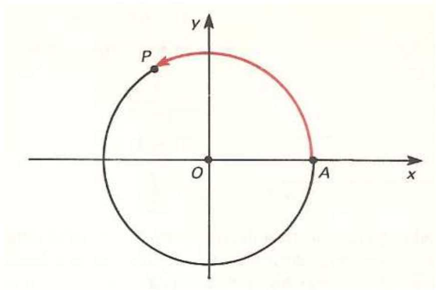
Denominamos circunferência orientada qualquer circunferência na qual se adota um sentido de percurso para os arcos, a partir de um ponto de referência chamado origem dos arcos.

Quanto ao ciclo trigonométrico

O ciclo trigonométrico é a circunferência orientadade raio unitário (*R* = *1*)na qual,fazendo o centro***O*** da circunferência coincidir com a origem dosistemacartesiano ortogonal, teremos quatroregiões chamadas quadrantes.



Pela figura a seguir, podemos concluir que:



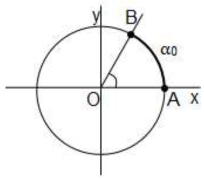
- A cada arco corresponde um ponto *P* do ciclo, que é a extremidade desse arco.
- Os arcos podem ser positivos ou negativos, conforme o sentido adotado.
- Cada extremidade de arco deverá situar-se em um dos quatro quadrantes.
- Existem arcos de medidas diferentes que têm a mesma extremidade.

Arcos da circunferência

Dados dois pontos distintos *A* e *B* sobre uma circunferência, está fica dividida em duas partes. Sendo uma dessas partes, incluídos *A* e *B*,chamada arco da circunferência $\widehat{AB}$. A coincidência de dois pontos *A* e *B* determinam que um deles é um ponto (arco nulo) e o outro é a circunferência (arco de uma volta).

Medidas de arcos

Na figura, podemos observar um arco $\widehat{AB}$, cuja medida poderá ser indicada em graus ou radianos por α_0, onde ($0 \leq \alpha_0 < 360º$ ou $0 \leq \alpha_0 < 2\pi$).



$$360º \leftrightarrow 2\pi \text{ rad}$$

$$180º \leftrightarrow \pi \text{ rad}$$

Indicamos a medida de um arco trigonométrico pelas expressões:
em graus: $\alpha = \alpha_0 + K \cdot 360º$;
em radianos: $\alpha = \alpha_0 + K \cdot 2\pi$,
onde K é o número de voltas.

Determinação de um arco trigonométrico

Dependendo do valor que *k* assume, α assumirá um valor diferente, chamado de determinação do arco trigonométrico. Observe o exemplo para $\alpha_0 = 60º$:

Em graus:$\alpha = \alpha_0 + K \cdot 360º$

- Quando k = – 1
$\alpha = 60º + (-1) \cdot 360º \Rightarrow \alpha = -300º$ (primeira determinação negativa).
- Quando k = 0
$\alpha = 60º + 0 \cdot 360º \Rightarrow \alpha = 60º$ (primeira determinação positiva).

- Quando k = 1
$\alpha = 60º + (1) \cdot 360º \Rightarrow \alpha = 420º$ (segunda determinação positiva).
E assim por diante...

Em radianos: $\alpha = \alpha_0 + K \cdot 2\pi$

- Quando k = – 1
$\alpha = \alpha_0 + k \cdot 2\pi \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}\pi + (-1) \cdot 2\pi \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}\pi - 2\pi \Rightarrow \alpha = \frac{1\pi - 6\pi}{3} \Rightarrow \alpha = -\frac{5}{3}\pi$(primeira determinação negativa)
- Quando k = 0
$\alpha = \alpha_0 + k \cdot 2\pi \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}\pi + 0 \cdot 2\pi \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}\pi$(primeira determinação positiva)
- Quando k = 1
$\alpha = \alpha_0 + k \cdot 2\pi \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}\pi + 1 \cdot 2\pi \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}\pi + 2\pi \Rightarrow \alpha = \frac{1\pi + 6\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{7}{3}\pi$(primeira determinação positiva)
E assim por diante...

Exemplos:
1) Calcule a primeira determinação positiva dos seguintes arcos:
a) 1.200º **:** 360º = 3 (número de voltas) e resto de 120º (primeira determinação positiva).

b) – 1.470º **:** 360º = – 4 (número de voltas) e resto – 30º ↔ 360º – 30º = 330º (primeira determinação positiva).

2) Determine em qual quadrante está a extremidade de cada um dos arcos dados abaixo:
a) 752º **:** 360º = 2 (número de voltas) e resto: 32º (primeiro quadrante)

b) 1.190º **:** 360º = 3 (número de voltas) e resto: 110º (segundo quadrante)

c) – 2.535º **:** 360º = 7 (número de voltas) e resto: – 15º (quarto quadrante)

d) $\frac{161}{10}\pi$**:** 2π = 8 (número de voltas) e resto: 1° (primeiro quadrante)

e) $\frac{95}{6}\pi$ **:** 2π = 7 (número de voltas) e resto: 330° (quarto quadrante)

f) $-\frac{65}{6}\pi$**:** 2π = 5 (número de voltas) e resto: – 150°(terceiro quadrante)

Exercícios:
1) Faça a Conversão para radianos:
a) 45º b) 120º c) 210º d) 15° e) 150º f) 315º g) 330º h) 310º

a	b	c	d	e	f	g	h
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{31\pi}{18}$

2) Faça a Conversão para graus:
a) $\frac{4\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{8}$ c) $\frac{4\pi}{3}$ d) $\frac{5\pi}{3}$ e) $\frac{4\pi}{6}$ f) $\frac{\pi}{12}$ g) $\frac{7\pi}{8}$ h) $\frac{3\pi}{4}$

a	b	c	d	e	f	g
240º	22,5º	300º	120º	15º	157,5º	135º

Arcos côngruos
São dois arcos congruentes ou côngruos que possuem a mesma extremidade.
O conveniente é trabalharmos com arcos de 1.ª volta, do sentido positivo. Quando isso não for possível, como por exemplo, 480º, determinaremos seu côngruo da 1.ª volta.

480º | 360º

120º1 (número de voltas no sentido positivo)

Medida do arco de mesma extremidade.

Para medidas negativas, esse procedimento nos leva ao arco côngruo da 1.ª volta negativa. Daí basta somarmos 360º para chegarmos à 1.ª volta positiva. Por exemplo:

– 157 º + 360º = 203º (é a medida do arco da 1ª volta com a mesma extremidade).

– 1.237º | 360º

– 157º 3 (número de voltas no sentido negativo)

Daí, – 157º + 360º = 203º (está no 3º quadrante 180º < 203º < 270º).

Exercícios:

1) Determine os quadrantes a que pertencem as extremidades dos seguintes arcos:

a) 18º b) 141º c) – 100º d) 1 998º e) $\frac{\pi}{6}$rad f) $\frac{5\pi}{4}$ rad

2) Determine os quadrantes a que pertencem as extremidades dos seguintes arcos:

a) $\frac{7\pi}{3}$ rad b) $\frac{7\pi}{4}$ rad c) $-\frac{11\pi}{4}$ rad d) $\frac{190\pi}{4}$ rad e) $\frac{4\pi}{3}$ rad f) $\frac{3\pi}{4}$ rad

3) Determine em qual quadrante situam-se as extremidades dos seguintes arcos:

a) 72º b) 1 280º c) – 300º d) – 400º e) $\frac{3\pi}{4}$ rad f) $\frac{11\pi}{3}$ rad

1a) 1	1b) 2	1c) 3	1d) 3	1e) 1	1f) 3
2a) 1	2b) 1	2c) 3	2d) 4	2e) 3	2f) 2
3a) 1	3b) 3	3c) 1	3d) 4	3e) 2	3f) 4

Matrizes

Qualquer tabela de números dispostos em linhas e colunas recebe o nome de matriz. A ordenação desses números em linhas e colunas simplifica os problemas apresentados nas mais diversas áreas, como Estatística, Economia, Física Atômica e na Matemática Pura e Aplicada.

Para exemplificar, vamos observar uma tabela feita a partir do consumo de sucos em um determinado restaurante:

	Laranja	Morango	Abacaxi	Maracujá
Mesa 1	3	2	1	3
Mesa 2	2	6	4	3
Mesa 3	1	0	7	5

Será uma matriz do tipo (m x n) aquela apresenta um número *m* de linhas e um número *n* de colunas. No exemplo acima, temos uma matriz do tipo 3 x 4, pois tem 3 linhas e 4 colunas.

Representamos as matrizes das seguintes formas:

através de parênteses ( )

através de colchetes [ ]

ou através de barras duplas ||||

Para denominarmos as matrizes, utilizamos letras maiúsculas.
Exemplos:Matriz S, 3 x 3

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 13 \\ 2 & 6 & 43 \\ 1 & 0 & 75 \end{bmatrix}$$

Matriz A, 3 x 1

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Matriz B, 1 x 2

$$\begin{Vmatrix} 5 & 9 \end{Vmatrix}$$

As matrizes possuem elementos que são representados genericamente por uma letra minúscula, acompanhada por dois índices, *i* e *j*, que indicam a linhas e a coluna respectivamente, onde se encontra o elemento da matriz (a*ij*).
Exemplo:

A matriz do exemplo S = $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 13 \\ 2 & 6 & 43 \\ 1 & 0 & 75 \end{bmatrix}$ associada à matriz genérica

S = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} a_{34} \end{bmatrix}$. Temos, por exemplo, então: $a_{11} = 3$; $a_{22} = 6$; $a_{32} = 0$; $a_{34} = 5$

Assim a matriz genérica é representada por: $A = (a_{ij})_{m \times n}$

Sendo *aij* elemento genérico localizado na *i*-ésima linha e *j*-ésima coluna, onde:$1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$

Exemplo:
1) Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{1 \times 3}$, tal que$a_{ij} = 3i + j$, então A = 1 x 3 $\Rightarrow$ A = [a_{11} a_{12} a_{13}]
A = [3 · 1 + 3 = 6 3 · 1 + 2 = 5 3 · 1 + 3 = 6] $\Rightarrow$ A = $[6 \quad 5 \quad 6]_{1 \times 3}$

Exercícios:
1) Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$ tal que a_{ij}= 2i + j.

1) A = $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

Tipos de matrizes

Matriz linha: é aquela que possui apenas uma linha.B = $\begin{Vmatrix} 5 & 9 \end{Vmatrix}$

Matriz coluna: é aquela que possui apenas uma coluna.A = $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

Matriz quadrada: é aquela que tem o mesmo número de linhas e colunas, assim *m* = *n*. Toda matriz quadrada possui diagonal principal e diagonal secundária.

$Q_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ Diagonal secundária

$Q_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ Diagonal principal

Matriz diagonal: é toda matriz cujos elementos não pertencentes à diagonal principal são iguais a zero.

$C_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

Matriz identidade: é aquela cujos elementos da diagonal principal são iguais à unidade, chamada também de matriz unidade, será representada por $\mathbf{I_n}$, sendo **n** a ordem da matriz.

$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz nula: é aquela cujos elementos são todos iguais a zero.

$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Exemplo: Determine os valores de x e y para que a matriz dada seja nula.

$A = \begin{bmatrix} 0 & 4y + 12 & 0 \\ 0 & 2x - 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$4y + 12 = 0 \Rightarrow 4y = -12 \Rightarrow y = -\frac{12}{4} \Rightarrow y = -3$

$2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{2} \Rightarrow x = 2$

Matriz oposta: matriz oposta de uma matriz dada (A) é a matriz (– A), cujo elemento da linha *i* e da coluna *j* é o oposto do elemento que está na linha *i* e na coluna *j* da matriz A.

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 9 \end{pmatrix}$, sua oposta é a matriz $-A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ -5 & -2 & -9 \end{pmatrix}$

Igualdade de matrizes

Serão iguais as matrizes de mesma ordem cujos elementos correspondentes forem iguais.

Exemplo: Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 6x & 4 & -y \\ 5 + z & 2 & 9 \end{pmatrix}$. Determine os valores de *x*, *y* e *z* para que A = B.

$3 = 6x \Rightarrow x = \frac{3}{6} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$-1 = -y \Rightarrow y = 1$

$5 = 5 + z \Rightarrow 5 - 5 = z \Rightarrow z = 0$

Exercícios:

1) Obtenha o valor de x e y sabendo que a matriz $A = \begin{bmatrix} x + 1 & 0 \\ 0 & y - 2 \end{bmatrix}$ é nula.

2) Calcule a soma dos elementos da diagonal principal com os elementos da diagonal secundária da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

3) Calcule o valor de a e b, sabendo que $\begin{bmatrix} 1 & a + 4 \\ 2 & b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

4) Sabendo que $I_2 = \begin{bmatrix} x - y & 0 \\ x + y & 1 \end{bmatrix}$ calcule **x** e **y**.

5) Escreva a matriz oposta de $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ sabendo que $a_{ij} = i + j$.

1) x = – 1 e y = 2	2) 30	3) a = 1 e b = – 2	4) $x = \frac{1}{2}$ e $y = \frac{-1}{2}$	5) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $-A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

Adição de matrizes

Se considerarmos duas matrizes **A** e **B**, do mesmo tipo **m** x **n**. A matrizresultante**C,** também de ordem **m** x **n**, será obtida pela soma dos elementos correspondentes de **A** e **B**, indicada por **A + B**.

Exemplo: Dadas as matrizes A = $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 9 \end{pmatrix}$e B = $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -9 \end{pmatrix}$, determine A + B:

A + B = $\begin{pmatrix} 3+8 & 4+4 & -1+6 \\ 5+0 & 2+2 & 9+(-9) \end{pmatrix} \Rightarrow$A + B = $\begin{pmatrix} 11 & 8 & 5 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Observação:só podemos somar matrizes do mesmo tipo e que a soma é do tipo das matrizes somadas.

Exercício:

1) Calcule A + B sabendo que A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

2) Dadas as matrizes A = $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ e C = $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, calcule: A + B + C.

1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$	2)$\begin{pmatrix} 4 & -10 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

Subtração de matrizes

Dado duas matrizes A e B, do tipo m x n. Subtrair a matriz B da matriz A significa somar a matriz A com a matriz oposta da matriz B, portanto: **A – B = A + (– B)**.

Exemplo: Dadas as matrizes A = $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$, determine A – B.

A – B = A + (– B) = $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow$ A – B = $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

Exercícios:

1) Dadas as matrizes A = $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, determine a matriz X, tal que: A + X = B

2) Dadas as matrizes A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$, determine a matriz X, tal que: A = B + X

1) X = $\begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$	2) X = $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Multiplicação de um número real por uma matriz

Sendo **k** um número real e a matriz **A** (m x n). Multiplicar o número **k** pela matriz **A** significa multiplicar todos os elementos da matriz **A** pelo número **k**.

Exemplo: Dadas as matrizes A = $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$.

Determine a matriz *Y*, tal que *Y* + *3A* – *B* = 0

$Y + 3A - B = 0 \Rightarrow Y = -3A + B \Rightarrow Y = -3 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$Y = \begin{bmatrix} -15 & -12 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow Y = \begin{bmatrix} -15 & -10 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$

Exercícios:

1) Dadas as matrizes A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 8 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ e C = $\begin{bmatrix} 5 & -9 \\ -10 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, determine a matriz: 3A + B – 2C

2) Sendo A = $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, calcule o valor de 2A – B.

1) $\begin{bmatrix} -4 & 24 \\ 26 & 11 \\ 14 & 10 \end{bmatrix}$	2) $\begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$

Determinantes

É um número que associado a uma matriz quadrada de ordem **n**.

Determinante de matriz de 1.ª ordem

Seja a matriz B = [a_{11}], de 1.ª ordem, seu determinante será seu elemento a_{11}.

det. B = a_{11}

Exemplos:

Sendo A = [23], então det. A = 23

Sendo C = [– 7], então det. C = – 7

Determinante de matriz de 2.ª ordem

Seja a matriz A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, de 2ª ordem, chamamos determinante dessa matriz ao número $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

det. A = $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

Exemplo:

A = $\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow$ det. A = 1 · 10 – 8 · 3 $\Rightarrow$ det. A = 10 – 24 $\Rightarrow$ det. A = – 14

B = $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -16 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ det. B = (– 3) · 1 – 0 ·(– 16) $\Rightarrow$ det. B = – 3 + 0 $\Rightarrow$ det. B = – 3

Determinante de matriz de 3.ª ordem

O determinante de uma matriz quadrada C = $(a_{ij})_{3x3}$ de ordem 3, representado por det.

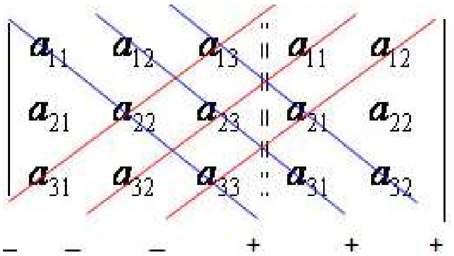
C = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, expressado por:

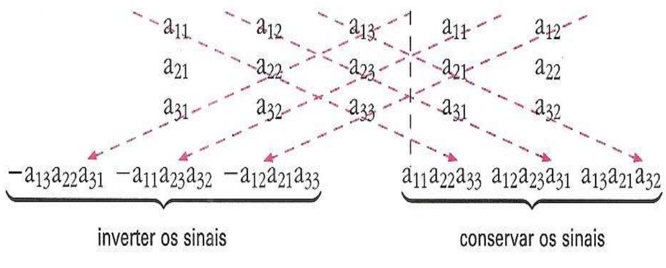
$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$

Uma maneira prática e fácil para o cálculo do determinante é aplicar a regra de Sarrus, que consiste em:

repetir ao lado do determinante original as duas primeiras colunas, ou abaixo as duas primeiras linhas;

obter os produtos observando o que mostram os esquemas abaixo.





Exemplos:

1) Calcule o determinante de A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 6 \\ -3 & 8 & -1 \end{bmatrix}$, então: A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 6 \\ -3 & 8 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$,

det. A = $1 \cdot 4 \cdot (-1) + 0 \cdot 6 \cdot (-3) + 2 \cdot 5 \cdot 8 - 2 \cdot 4 \cdot (-3) - 1 \cdot 6 \cdot 8 - 0 \cdot 5 \cdot (-1) \Rightarrow$
det. A = $-4 + 0 + 80 - 24 - 48 - 0 \Rightarrow$ det. A = 4

2) Resolva a equação B = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & y \\ -3 & 4 & 6 \end{bmatrix} = 0$, então: B = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & y \\ -3 & 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$

$1 \cdot 6 \cdot 6 + 3 \cdot y \cdot (-3) + 2 \cdot 2 \cdot 4 - 2 \cdot 6 \cdot (-3) - 1 \cdot y \cdot 4 - 3 \cdot 2 \cdot 6 = 0 \Rightarrow$

$36 - 9y + 16 + 36 - 4y - 36 = 0 \Rightarrow 52 - 13y = 0 \Rightarrow 52 = 13y \Rightarrow \frac{52}{13} = y \Rightarrow y = 4$

Exercícios:

1) Resolva em $\mathbb{R}$, a equação $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & x & 1 \\ 2 & 1 & x \end{vmatrix} = 11$.

2) Encontre o determinante de cada matriz abaixo:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

3) Solucione as seguintes equações no conjunto $\mathbb{R}$:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 0 & x & x \\ 4 & 9 & 0 \end{vmatrix} = -413$. b) $\begin{vmatrix} 1 & -x & x^2 \\ -1 & 0 & x \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -9$.

1) x' = 2 e x" = – 8	2a) 2	2b) – 2	2c) – 59	2d) – 33	3a) 7	3b) x'= – 3 e x' = 3

Análise combinatória

Os processos de contagem na Matemática são feitos através da análise combinatória, com aplicações em diversos campos, como na programação de computadores, na economia, na biologia molecular, na estatística, na logica etc.

Portanto, a análise combinatória tem por objetivo estudar as várias formas de agrupar pessoas, números, letras, etc.

Por estar apoiada no PrincípioFundamental da Contagem ou Regra do Produto, é suporte fundamental da Teoria das Probabilidades.

Vamos iniciar apresentado alguns exemplos que fazem parte do dia-a-dia.

Exemplo 1.De quantas maneiras diferentes podemos combinar duas camisas diferentes e três calças, também diferentes?

Construindo uma tabela teríamos as seguintes maneiras:

Podemos observar que seriam de 6 maneiras diferentes.

Número de maneiras	Combinações
1	camisa 1 com calça 1
2	camisa 1 com calça 2
3	camisa 1 com calça 3
4	camisa 2 com calça 1
5	camisa 2 com calça 2
6	camisa 2 com calça 3

Exemplo 2.De quantas maneiras diferentes podemos pintar uma bandeira de 3 listras, usando as cores amarelo ou vermelho? Podemos ter 8 possibilidades diferentes.

Número de bandeiras	Cores usadas		
1	amarelo	amarelo	amarelo
2	amarelo	amarelo	vermelho
3	amarelo	vermelho	amarelo
4	amarelo	vermelho	vermelho
5	vermelho	amarelo	amarelo
6	vermelho	amarelo	vermelho
7	vermelho	vermelho	amarelo
8	vermelho	vermelho	vermelho

Exemplo 3. Uma fábrica de automóveis produz veículos de três tamanhos (pequeno, médio e grande), com dois tipos de motores (M_1 e M_2) e em três cores (vinho, prata e vermelho). Quantas opções tem o comprador?

Opções de compra	Tamanho	Motor	Cor
1	pequeno	motor 1	vinho
2	pequeno	motor 1	prata
3	pequeno	motor 1	vermelho
4	pequeno	motor 2	vinho
5	pequeno	motor 2	prata
6	pequeno	motor 2	vermelho
7	médio	motor 1	vinho
8	médio	motor 1	prata
9	médio	motor 1	vermelho
10	médio	motor 2	vinho
11	médio	motor 2	prata
12	médio	motor 2	vermelho
13	grande	motor 1	vinho
14	grande	motor 1	prata
15	grande	motor 1	vermelho
16	grande	motor 2	vinho
17	grande	motor 2	prata
18	grande	motor 2	vermelho

Podemos ter 18 opções de compra.

Como podemos observar nos exemplos acima, foram sendo construídos descrevendo e contando todas as possibilidades. Entretanto, na medida em que o número de possibilidades aumenta, essa forma de construção passa a ser inviável.

Assim, a análise combinatória oferece condições, por meio de métodos e fórmulas, de calcularmos vários tipos de problemas, o número de possibilidades, sem a necessidade de listá-las ou enumerá-las.

Exercícios:

1) Quantos anagramas podemos formar com a palavra Lua?

2) Dado o conjunto A = {1, 3, 4}, quantos são os números com dois algarismos distintos que podemos formar?

3) Lançando um dado duas vezes seguidas, quais as possibilidades de obtermos soma igual a 8?

4) Camila tem 4 saias e 2 blusas. De quantas maneiras ela pode combinar as duas peças?

1) 6	2) 6	3) 5	4) 8

Agrupamento simples

São os agrupamentos cujos elementos são todos distintos.

Exemplo: (0,2); (0, 2, 4); (0, 2, 4, 6) etc.

Agrupamentos com repetições

São aqueles que apresentam um ou mais elementos repetidos.

Exemplo: (2, 2, 3); (2, 3, 3); (2, 2, 3, 3) etc

Árvore de possibilidades

É utilizada para enumerar todas as possibilidades de um evento com o objetivo de facilitar a resolução dos problemas de contagem.

Exemplo: Um restaurante oferece aos seus clientes três tipos de pratos: dois tipos de sopa (S), dois tipos de carne (C) e três tipos de massa (M). Assim, pela árvore de possibilidades temos:

Etapa 1	Etapa 2	Etapa 3	Tipos de pratos
		M1	S1 C1 M1
	C1	M2	S1 C1 M2
		M3	S1 C1 M3
S1			
		M1	S1 C2 M1
	C2	M2	S1 C2 M2
		M3	S1 C2 M3
		M1	S2 C1 M1
	C1	M2	S2 C1 M2
		M3	S2 C1 M3
S2			
		M1	S2 C2 M1
	C2	M2	S2C2 M2
		M3	S2 C2 M3
2 possibilidades S1 e S2	2 possibilidades C1 e C2	3 possibilidades M1, M2 e M3	12 possibilidades de pratos o restaurante oferece aos clientes.

Princípio fundamental da contagem

É o método que possibilita multiplicar o número de possibilidade de cada etapa da experiência. Exemplo: com base no exemplo da árvore, temos 2 x 2 x 3 = 12 possibilidades.

Exercícios:

1) Um teatro tem 5 portas. De quantas maneiras diferentes uma pessoa pode entrar e sair do teatro?

2) Pedro tem 3 camisas, 5 calças, 2 gravatas, 4 pares de sapatos e 1 casaco. De quantas maneiras diferentes ele poderá se vestir usando uma peça de cada conjunto?

3) Quantos números de 3 algarismos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

4) Uma fábrica tem 5 modelos de carros e utiliza 8 cores. Quantas opções de compra tem o consumidor?

1) 25	2) 120	3) 729	4) 40

Fatorial de um número

Sendo **n** ∈ $\mathbb{N}$ e **n**> 1, chamamos fatorial de **n** como o produto dos **n** números naturais consecutivos de 1 até **n** e indicamos por **n!** (**n** fatorial).

Expressamos: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot (n – 2) \cdot (n – 1) \cdot n$

Exemplos:

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

Podemos notar que um fatorial faz parte do outro: $3! = 3 \cdot 2!$, $4! = 4 \cdot 3!$, $5! = 5 \cdot 4!$

Assim, escrevemos: $\mathbf{n! = (n – 1)! \cdot n}$

A expressão acima permite concluir que sendo n = 2, temos:

$2! = (2 – 1) \cdot 2$ ou $2 = 1! \cdot 2$, possibilitando dizer então que **1! = 1**.

Também, a expressão permite demonstrar se n = 1, teremos:

$1! = (1 – 1)! \cdot 1$ ou $1 = 0! \cdot 1$, então **0! = 1**

Exemplos:

1) Calcule (a), simplifique (b) e resolva a equação (c):

a) $\frac{12!}{9!} = \frac{9!\ .\ 10\ .\ 11\ .\ 12}{9!} = 10 \cdot 11 \cdot 12 = 1.320$

b) $\frac{n! + (n+1)!}{(n+2)!} = \frac{n! + n!\ .\ (n+1)!}{n!\ .\ (n+1)\ .\ (n+2)!} = \frac{n!(1+ n + 1)}{n!\ .\ (n+1)\ .\ (n+2)!} = \frac{n!\ .\ (n+2)}{n!\ .\ (n+1)\ .\ (n+2)} = \frac{1}{n+1}$

c) $12 \cdot (n – 1)! = (n + 1)! \Rightarrow 12 \cdot (n – 1)! = (n – 1)! \cdot n \cdot (n + 1) \Rightarrow 12 = n \cdot (n + 1) \Rightarrow$

$12 = n^2 + n \Rightarrow n^2 + n – 12 = 0$ (equação do 2º grau, onde a = 1, b = 1 e c = – 12)

$\Delta = b^2 – 4ac \Rightarrow \Delta = 1^2 – 4 \cdot 1 \cdot (– 12) \Rightarrow \Delta = 1 + 48 \Rightarrow \Delta = 49$

$n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2\ .\ 1} \Rightarrow n = \frac{-1 \pm 7}{2} \Rightarrow n' = \frac{6}{2} = 3$ e $n'' = \frac{-8}{2} = -4$ (não convém).

Resposta: V = {3}.

Exercícios:

1) De quantas maneiras podemos organizar 7 alunos numa fila?

2) Simplificar:

a) $\frac{7!}{5!}$ b) $\frac{10!7!}{5!9!}$ c) $\frac{15! - 13!}{13 \ . \ 12!}$

1) 5.040	2a) 42	2b) 420	2c) 209

Arranjo simples

Arranjos são agrupamentos que diferem entre si ao mudarmos a ordem de seus elementos.

Exemplo:

1) Em uma escola, há três estudantes concorrendo à presidência e vice-presidência do grêmio estudantil: Pedro (P), Maria (M) e Joana (J). De quantas formas os cargos podem ser preenchidos?

Observe os possíveis agrupamentos na tabela:

Presidente	P	M	M	J	P	J
Vice-presidente	M	P	J	M	J	P

Ao trocarmos a ordem das pessoas, obtemos agrupamentos diferentes, que chamamos de arranjos.

Pelo PFC, temos: $T = 3 \cdot 2 = 6$ maneiras

As seis maneiras obtidas correspondem ao arranjo de três elementos, tomados dois a dois, indicados da seguinte forma: $A_{3,\,2} = 3 \cdot 2 = 6$, onde 3 indica o primeiro fator do produto e 2 indica o número de fatores do produto.

Exemplos:

a) $A_{5,\,1} = 5$

b) $A_{5,\,2} = 5 \cdot 4$, sendo $4 = 5 - (2 - 1)$

c) $A_{5,\,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3$, sendo $3 = 5 - (3 - 1)$

d) $A_{5,4} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$, sendo $2 = 5 - (4 - 1)$

e) $A_{5,\,5} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, sendo $1 = 5 - (5 - 1)$

Para **n** elementos, tomados **p** a **p**, podemos generalizar da seguinte forma:

$$A_{n,\,p} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)}_{\boldsymbol{p} \text{ fatores}}$$

Cálculo do número de arranjos usando a notação de fatorial

Exemplo: vejamos o exemplo da letra c dos exemplos anteriores.

$A_{5,\,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \Rightarrow A_{5,3} = \frac{5\ .\ 4\ .\ 3\ .\ \cancel{2\ .\ 1}}{\cancel{2\ .\ 1}} \Rightarrow A_{5,3} = \frac{5!}{2!} \Rightarrow A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!}$

Para arranjos de **n** elementos, tomados ***p*** a ***p*** (***p***≤ **n**), teremos:

$$A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplos:

a) Calcule o valor de:

$A_{6,\,3} = \frac{6!}{(6-3)!} \Rightarrow A_{6,\,3} = \frac{6!}{3!} \Rightarrow A_{6,\,3} = \frac{6\ .\ 5\ .\ 4\ .\ 3!}{3!} \Rightarrow A_{6,\,3} = 120$

$A_{8,\,4} = \frac{8!}{(8-4)!} \Rightarrow A_{8,\,4} = \frac{8!}{4!} \Rightarrow A_{8,\,4} = \frac{8\ .\ 7\ .\ 6\ .\ 5\ .\ 4!}{4!} \Rightarrow A_{8,\,4} = 1.680$

b) Calcule o valor de:

$\frac{A_{5,3} - A_{4,2}}{16} \Rightarrow \frac{\frac{5!}{(5-3)!} - \frac{4!}{(4-2)!}}{16} \Rightarrow \frac{\frac{5\ .\ 4\ .\ 3\ .\ 2!}{2!} - \frac{4\ .\ 3\ .\ 2!}{2!}}{16} \Rightarrow \frac{60-12}{16} \Rightarrow \frac{48}{16} \Rightarrow 3$

c) Quantos números menores que 5 000, de quatro algarismos, podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 5 e 7, sem que haja repetição de algarismos?
3 _ _ _   2 _ _ _   1 _ _ _ $3 \cdot A_{4,\,2} = 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow$ 72 números menores que 5.000.

d) Sendo $A_{n,\,3} = A_{n,\,2}$ calcule **n**.
$\cancel{n \cdot (n-1)} \cdot (n-2) \cdot (n-3) = \cancel{n \cdot (n-1)} \Rightarrow (n-2) \cdot (n-3) \Rightarrow n^2 - 3n - 2n + 6 = 0 \Rightarrow$
$n^2 - 5n + 6 = 0 \Rightarrow n' = 3$ e $n'' = 2$ (não convém) Resposta: S = {3}.

Exercícios:
1) Calcular o valor de $A_{6,\,2}$.

2) Resolver as equações:
a) $A_{n,\,2} = 2$ b) $A_{x,\,2} = 9 \cdot A_{x,\,1}$

3) Dez meninos apostam uma corrida. De quantos modos diferentes pode ser formado o grupo dos três primeiros colocados?

4) Considere a palavra MATRIZES. Quantos grupos de 4 letras distintas podemos formar com as letras dessa palavra?

5) O professor escolhe dois alunos dentre os 30 alunos de uma sala de aula e oferece uma bola para um deles e um livro para o outro. O número total de maneiras de premiar dois alunos dessa classe é?

6) Calcule quantos números múltiplos de 3, de 4 algarismos distintos, podem ser formados com 2, 3, 4, 6 e 9.

1) 30	2a) 2	2b) 10	3) 720	4) 1.680	5) 870	6) 72

Permutação simples
São os arranjos onde participam todos os elementos do conjunto. Ou seja, **p = n!**

Exemplos:
1) De quantas maneiras distintas podemos arrumar 6 livros diferentes em uma prateleira?
$n = 6 \Rightarrow P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow P_6 = 720$ maneiras.
2) (PUC-RS) Com os algarismos 1, 2, 3 e 4, sem repeti-los, podemos escrever *x* números maiores que 2 400. O valor de *x* é:
A) 6   B) 12   C) 14   D) 18   E) 24

2 4 _ _ $P_2 = 2! = 2 \cdot 1 = 2$
3 _ _ _ $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
4 _ _ _ $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
$\Rightarrow$ 14 números maiores que 2 400.

Resposta: letra C

3) Com relação a palavra TEORIA:
a) Quantos anagramas existem? (anagramas são permutações).
$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow P_6 = 720$
Quantos anagramas começam por T?
T _ _ _ _ _
$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow P_5 = 120$

b) Quantos anagramas começam por T e terminam com A?
T _ _ _ _ A

$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow P_4 = 24$

d) Quantos anagramas começam com vogal?
A _ _ _ _ _ $\Rightarrow P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow P_5 = 120$
E _ _ _ _ _ $\Rightarrow P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow P_5 = 120$
I _ _ _ _ _ $\Rightarrow P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow P_5 = 120$
O _ _ _ _ _ $\Rightarrow P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow P_5 = 120$
Totalizando 480 anagramas começando com vogal.

e) Quantos anagramas têm as vogais juntas?
Como as vogais devem estar juntas, ocupam o lugar de uma "única letra" que deve ser permutada com as letras T e R. Portanto o número de permutações é:
$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
Também devemos observar que as vogais dentro dessas permutações podem permutar-se entre si, de quatro maneiras, ou seja:
$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
Assim o número de anagramas nestas condições será $6 \cdot 24 = 144$.

Exercícios:
1) Calcule:a) $\frac{P_5 - P_4}{P_3}$ b) $\frac{A_{5,2} + 3 \,.\, P_4}{4}$

2) Determine o número de anagramas da palavra AMOR.

3) Quantos números naturais de 4 algarismos distintos podemos escrever usando os algarismos 1, 3, 5 e 7? Qual a posição ocupada pelo número 7.153?

4) Num veículo viajam 7 pessoas das quais 2 são motoristas. De quantos modos é possível acomodá-las, sabendo que no banco dianteiro há 3 lugares e no traseiro 4 lugares?

Calcule a soma dos números que se pode formar permutando os algarismos 5, 3, 7 e 2.

1a) 16	1b) 23	2) 24	3) 20 e 20ª posição	4) 1.440	5) 113.322

Combinações simples
São agrupamentos que não diferem entre si ao mudarmos a ordem de seus elementos. Podemos dizer então que os arranjos que diferem entre si somente pela natureza de seus elementos são considerados combinações simples.

Exemplo:
Considerando um conjunto formado por quatro pessoas: José, Paulo, Elza e Rita, indicado por: P = {J, P, E, R}. Os subconjuntos do conjunto P com exceção do conjunto vazio são:
- com uma pessoa: {J}, {P}, {E} e {R};
- com duas pessoas: {J, P}, {J, E}, {J, R}, {P, E}, {P, R}, {E, R};
- com três pessoas: {J, P, E}, {J, E, R}, {P, E, R}, {P, E, R};
- com quatro pessoas: {J, P, E, R}

{J, P} = {P, J}; {P, E, R} = {R, E, P}; {J, P, E, R} = {R, E, P, J}
Podemos observar que trocando a posição dos elementos dentro dos conjuntos eles continuam sendo os mesmos. Assim, os agrupamentos que possuem essa característica são chamados combinações.

Cálculo do número de combinações simples
Genericamente, o cálculo do número de combinações simples existentes é dado pela expressão:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemplos:
1) $C_{6,\,2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} \Rightarrow \frac{6!}{2!(4)!} \Rightarrow \frac{6 \,.\, 5 \,.\, \cancel{4!}}{2! \,.\, \cancel{4!}} \Rightarrow \frac{30}{2} \Rightarrow 15$

2) $C_{4,\,4} = \frac{4!}{4!(4-4)!} \Rightarrow \frac{4!}{4!(0)!} \Rightarrow \frac{4!}{4!\,.\,0!} \Rightarrow 1$

3) Tem-se um baralho completo (52 cartas). De quantas maneiras podemos:
a) Retirar duas cartas quaisquer?
Como a ordem não importa, temos: $C_{52,\,2} = \frac{52!}{2!} \Rightarrow \frac{52\,.\,51}{2} \Rightarrow 1\,326$
b) Retirar duas figuras?
Como existem 12 figuras no baralho, temos: $C_{12,\,2} = \frac{A_{12,2}}{2!} \Rightarrow \frac{12\,.\,11}{2} \Rightarrow \frac{132}{2} \Rightarrow 66$

4) Quantas comissões de 3 pessoas podemos formar com um grupo de 7 pessoas?
$C_{7,3} = \frac{A_{7,3}}{3!} \Rightarrow \frac{7\,.\,6\,.\,5}{3\,.\,2} \Rightarrow \frac{210}{6} \Rightarrow 35$

5) Em uma sala estão 6 rapazes e 4 moças. Quantas equipes podemos formar, tendo cada equipe 4 rapazes e 2 moças?
$C_{6,\,4}$ e $C_{4,\,2} \Rightarrow C_{6,\,4} \cdot C_{4,\,2} \Rightarrow 15 \cdot 6 = 90$ equipes.

$C_{6,\,4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} \Rightarrow \frac{6!}{4!\,.4!} \Rightarrow \frac{6\,.\,5\,.\,\cancel{4!}}{\cancel{4!}\,.\,2!} \Rightarrow \frac{30}{2} \Rightarrow 15$

$C_{4,\,2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} \Rightarrow \frac{4!}{2!\,.\,2!} \Rightarrow \frac{4\,.\,3\,.\,\cancel{2!}}{\cancel{2!}\,.\,2!} \Rightarrow \frac{12}{2} \Rightarrow 6$

Exercícios:
1) Quantos times de futebol de salão podemos formar com 10 jogadores capazes de jogar em qualquer posição?

2) Na direção de uma empresa existem 5 brasileiros e 4 alemães. Quantas comissões de 3 pessoas podemos formar, tendo cada uma delas:
a) 2 brasileiros e um alemão? b) pelo menos 1 alemão?

3) Quantos triângulos distintos podemos formar com 8 pontos distintos de uma circunferência?

4) Quantas comissões de 5 pessoas podemos formar com 8 deputados federais e 6 senadores, de modo que em cada comissão haja pelo menos 2 deputados?

1) 252	2a) 40	2b) 74	3) 56	4) 1 876

Exercícios:
1) Do número 83.137.683, quantos números pares podemos obter permutando seus algarismos?

2) Considere as letras da palavra MATEMÁTICA.
a) Quantos anagramas são possíveis formar? b) Quantos começam com M e terminam com A?
c) Quantos têm vogais juntas? d) Quantos têm as vogais separadas?

3) Quantos números pares e quantos ímpares podemos obter permutando os algarismos do número 55 788?

1) 1260	2a) 151 200	2b) 10 080	2c) 3 600	2d) 147 600	3a) 12 pares	3b) 18 ímpares

Probabilidade
Probabilidade nada mais é do que experimentos aleatórios, nos quais repetimos uma determinada ação em idênticas condições, produzem resultados diferentes. Assim, ao executarmos sem saber quais serão os resultados do experimento, conseguimos descrever todo o conjunto de resultados possíveis de acontecer.

Como não conseguimos prever os resultados, pois variam de experimento para experimento, em virtude de uma multiplicidade de causas não controláveis, denominadas de acaso.

Exemplos:
a) Lançar uma moeda para cima e observar a face de cima.
b) Lançar um dado e observar o número da face de cima.
c) De uma urna contendo 3 bolas vermelhas e 2 brancas, selecionar uma bola e observar a cor.
d) De um baralho de 52 cartas, selecionar uma carta, e observar seu naipe.
e) Observar o tempo que um certo aluno gasta para ir de ônibus, de sua casa até a escola.

Espaço amostral
Consideramos espaço amostral, e indicamos por Ω, um conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Exemplos:
a) Lançar uma moeda e observar a face de cima.Ω = {K, C} onde K representa cara e C, coroa.
b) Lançar um dado e observar a número da face de cima.Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
c) De uma urna contendo 3 bolas vermelhas (V), 2 bolas brancas (B) e 5 bolas azuis (A), extrair uma bola e observar a cor. Ω = {V, B, A}

Evento
É qualquer subconjunto de um espaço amostral (Ω), e será indicado por **E**.
Exemplo:lançam-se uma moeda e um dado. Enumere os seguintes eventos:
E_1: sair cara e face par; E_2: sair coroa.

Dado	1	2	3	4	5	6
C	(C, 1)	(C, 2)	(C, 3)	(C, 4)	(C, 5)	(C, 6)
K	(K, 1)	(K, 2)	(K, 3)	(K, 4)	(K, 5)	(K, 6)

Os eventos são:
E_1 = { (C, 2), (C, 4), (C, 6)} E_2 = { (K, 1), (K, 2), (K, 3), (K, 4), (K, 5), (K, 6)}

Exercício:
1) Numa urna existem 15 bolas numeradas de 1 a 15. Considerando o experimento aleatório "retirada de uma bola", descreva o evento:
a) "ocorrência de número par"; b) "ocorrência de número divisível por 5";
c) "obtenção de número primo".

Probabilidade de um evento
Num espaço amostral (Ω) equiprovável (com elementos que têm chances iguais de ocorrer), de um experimento aleatório, e E, um evento desse espaço amostral, a probabilidade de um evento é definida pelo número real P(E), tal que:

$$P(E) = \frac{n\,(E)}{n\,(\Omega)}, \text{ onde:}$$

n(E): número de elementos do evento E;
n(S): número de elementos do espaço amostral Ω.

Propriedades das probabilidades
1.ª) A probabilidade do evento certo é igual a 1, ou seja:P(E) = 1

Exemplo: a probabilidade de sair número menor ou igual a *e*, no lançamento de um dado.

2.ª) A probabilidade de ocorrer um evento E do espaço amostral Ω é sempre maior ou igual a zero e menor ou igual a 1, ou seja: $0 \leq P(E) \leq 1$

Exemplos:
1) No lançamento de um dado, determine a probabilidade de se obter:
a) O número 4. b) Um número par. c) Um número maior que 2.
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $n(\Omega) = 6$, então:
a) $E = \{4\} \rightarrow n(E) = 1$ e $P(E) = \frac{n\,(E)}{n\,(\Omega)} \rightarrow P(E) = \frac{1}{6}$
b) $E_1 = \{2, 4, 6\} \rightarrow n(E_1) = 3$ e $P(E_1) = \frac{n\,(E_1)}{n\,(\Omega)} \rightarrow P(E_1) = \frac{3}{6} \rightarrow P(E_1) = \frac{1}{2}$ (50%)
c) $E_2 = \{3, 4, 5, 6\} \rightarrow n(E_2) = 4$ e $P(E_2) = \frac{n\,(E_2)}{n\,(\Omega)} \rightarrow P(E_2) = \frac{4}{6} \rightarrow P(E_2) = \frac{2}{3}$
2) De um baralho de 52 cartas, tira-se ao acaso uma das cartas. Determine a probabilidade de que a carta seja:
a) Um valete. b) Um rei de copas. c) Uma carta de espada.

$\Omega = 52$

a) Temos $n(E) = 4$ (são 4 valetes no baralho), então, $P(E) = \frac{n\,(E)}{n\,(\Omega)} \Rightarrow P(E) = \frac{4}{52} \Rightarrow P(E) = \frac{1}{13}$.

b) E_1: sair rei de copas $\Rightarrow n\,(E_1) = 1$ (só existe um rei de copas) $\Rightarrow P(E_1) = \frac{1}{52}$.

c) E_2: sair carta de espadas $\Rightarrow n\,(E_2) = 13 \Rightarrow P(E_2) = \frac{n\,(E)}{n\,(\Omega)} \Rightarrow P(E_2) = \frac{13}{52} \Rightarrow P(E_2) = \frac{1}{4}$ (25%).

Adição de probabilidades

Sejam E_1 e E_2 eventos quaisquer de um espaço amostral Ω. Então, podemos escrever:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

Exemplo:
Numa pesquisa feita com 600 pessoas de uma comunidade, verificou-se que 200 leem o jornal **A**, 300 leem o jornal **B** e 150 leem os jornais **A** e **B**. Qual a probabilidade de, sorteando-se uma pessoa, ela ser leitora do jornal **A** ou do jornal **B**?

$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} \Rightarrow \frac{200}{600} \Rightarrow \frac{1}{3}$

$P(B) = \frac{n(B)}{n(E)} \Rightarrow \frac{300}{600} \Rightarrow \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(E)} \Rightarrow \frac{150}{600} \Rightarrow \frac{1}{4}$

Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, temos: $P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{4 + 6 - 3}{12} \Rightarrow \frac{7}{12}$

Produto de probabilidades

Sejam A (E_1) e B (E_2) dois eventos independentes de um mesmo espaço amostral (Ω), podemos expressar a igualdade: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Exemplo:
Numa urna existem 6 bolas azuis e 4 bolas amarelas. Qual a probabilidade de se retirarem 2 bolas sucessivamente, com reposição, sendo a primeira azul e a segunda amarela?
Seja $A(E_1)$ o evento "extração de bola azul na primeira retirada".
Temos 6 bolas azuis num total de 10 bolas; portanto, a probabilidade de extrair bola azul é $P(A) = \frac{6}{10} \Rightarrow \frac{3}{5}$
Sendo $B(E_2)$ o evento "extração de bola amarela na segunda retirada".
Temos 4 bolas amarelas num total de 10 bolas; portanto, a probabilidade de extrair bola amarela é $P(B) = \frac{4}{10} \Rightarrow \frac{2}{5}$
Como **A** e **B** são independentes, temos:
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$

Probabilidade condicional

Quando se impõe uma condição que reduz o espaço amostral, dizemos que se trata de uma probabilidade condicional.

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

Exemplo:

Jogando-se um dado e sabendo-se que ocorreu um número maior que 3, qual é a probabilidade de sair um número ímpar?

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

$E_1 = \{1, 3, 5\} \Rightarrow n(E_1) = 3$;

$E_2 = \{4, 5, 6\} \Rightarrow n(E_2) = 3$.

Temos que $E_1 \cap E_2 = \{5\}$ e $n(E_1 \cap E_2) = 1$ $\quad P\left(\frac{E_1}{E_2}\right) = \frac{n(E_1 \cap E_2)}{n(E_2)} \Rightarrow \frac{1}{3}$

Exercícios:

1) Lançando-se simultaneamente 3 moedas, qual a possibilidade de ocorrer pelo menos uma cara?

2) Qual a possibilidade de se obter um número par, escolhendo-se aleatoriamente uma das permutações dos algarismos do número 1.234.567?

3) Num prédio de 5 andares existem 4 apartamentos por andar. Apenas 5 apartamentos estão ocupados. Qual a probabilidade de que cada um dos 5 andares tenha um apartamento ocupado?

4) Lançando-se sucessivamente uma mesma moeda três vezes, qual a probabilidade de não ocorrer a mesma face nas três moedas?

5) Qual é a probabilidade de se extrair uma bola verdeou vermelha de uma urna que contém 5 bolas vermelhas, 4 amarelas e 3 verdes?

6) Num grupo de 200 estudantes, 60 gostam de Matemática, 40 gostam de Música e 20 gostam tanto de Matemática quanto de Música. Escolhendo-se um estudante ao acaso, qual é a probabilidade de ele gostar de Matemática ou Música?

7) Extrai-se, aleatoriamente, uma carta de um baralho de 52 cartas. Qual é a probabilidade de a carta extraída ser valete ou carta de paus?

8) Num lançamento simultâneo de dois dados, qual é a probabilidade de termos números pares nas faces, sabendo que a soma é 6?

9) Uma urna contém 8 bolas amarelas e 6 verdes. Qual é a probabilidade de retirarmos 2 bolas sucessivamente, sem reposição, sendo a primeira verde e a segunda amarela?

10) Retira-se ao acaso um valete de um baralho comum, com 52 cartas. Sem reposição da carta extraída, qual a probabilidade de, numa segunda retirada, sair outro valete?

1) $\frac{7}{8}$	2) $\frac{3}{7}$	3)$\frac{64}{969}$	4)$\frac{3}{4}$	5)$\frac{2}{3}$	6)$\frac{2}{5}$	7)$\frac{4}{13}$	8)$\frac{2}{5}$	9)$\frac{24}{91}$	10)$\frac{1}{221}$

Porcentagem

A porcentagem ou percentagem, do latim *per centum*, cujo significado é “por cento”, ou seja “a cada centena”, é uma medida de razão com base 100. Dizemos então que numa proporção a relação entre dois valores é uma fração na qual o numerador será a parte e o denominador será o todo. No caso da porcentagem, será a divisão de qualquer número (numerador) por 100 (cem) que será o denominador.

Assim, toda razão é uma fração é uma divisão.

Exemplos:

1) O salário de Pedro aumentou 7%.

7% = $\frac{7}{100}$ = 0,07

2) O preço do feijão subiu 24%.

24% = $\frac{24}{100}$ = 0,24

3) A taxa de juros para empréstimos bancários está em 248% ao ano.

248% = $\frac{248}{100}$ = 2,48

4) A taxa de desemprego aumentou 0,6% no mês de maio.

0,6% = $\frac{0,6}{100}$ = 0,006

5) O preço do quilo de feijão passou de R$ 4,50 para R$ 5,58. Qual foi a porcentagem de aumento?

Subtraímos o preço antigo do novo preço
R$ 5,58 – R$ 4,50 = R$ 1,08 de aumento, comparado com o preço antigo, temos:

$\frac{\text{R\$ } 1{,}08}{\text{R\$ } 4{,}50} \Longrightarrow$ 0,24 = $\frac{24}{100}$ = 24%

6) Uma casa foi vendida por R$ 230.000,00. A taxa da corretagem corresponde a 6% do valor do imóvel, qual foi a importância recebida pelo corretor?

6% de R$ 230.000,00 $\Longrightarrow \frac{6}{1\cancel{00}} \cdot$ R$ 230.0$\cancel{00}$ $\Longrightarrow$ 6 · R$ 2.300 $\Longrightarrow$ R$ 13.800,00

7) Um trabalhador obteve um aumento de 30% no seu salário e recebeu R$ 1.365,00. Determine o valor do salário antes do aumento.

Sabendo que R$ 1.365,00 corresponde a 130% (100% + 30%), então:

$\frac{R\$\ 1.365\ .\ 100\cancel{\%}}{130\ \cancel{\%}} \Longrightarrow \frac{\text{R\$ } 13650-}{13\cancel{0}} \Longrightarrow$ R$ 1.050,00

8) Calcule:

a) 12% de 600 $\Longrightarrow \frac{12}{1\cancel{00}}$. 6$\cancel{00}$ $\Longrightarrow$ 12 · 6 $\Longrightarrow$ 72

b) 8% de 300 $\Longrightarrow \frac{8}{1\cancel{00}}$. 3$\cancel{00}$ $\Longrightarrow$ 8 · 3 $\Longrightarrow$ 24

c) 20% de 800 $\Longrightarrow \frac{20}{1\cancel{00}}$. 8$\cancel{00}$ $\Longrightarrow$ 20 · 8 $\Longrightarrow$ 160

d) 47,5% de 2.000 $\Longrightarrow \frac{475}{1\cancel{000}}$. 2 $\cancel{000}$ $\Longrightarrow$ 475 · 2 $\Longrightarrow$ 950 ou $\frac{47,5}{1\cancel{00}} \cdot$ 2 0$\cancel{00}$ $\Longrightarrow$ 47,5 · 20 $\Longrightarrow$ 950

e) 40% de 40% $\Longrightarrow \frac{40}{100} \cdot \frac{40}{100} \Longrightarrow \frac{1\ 6\cancel{00}}{10\ 0\cancel{0}-} \Longrightarrow \frac{16}{100} \Longrightarrow$ 16%

f) 10% de 100% $\Longrightarrow \frac{10}{100} \cdot \frac{100}{100} \Longrightarrow \frac{1\cancel{000}}{10\ \cancel{000}} \Longrightarrow \frac{1}{10} \Longrightarrow$ 0,1%

g) 50% de 50% $\Longrightarrow \frac{50}{100} \cdot \frac{50}{100} \Longrightarrow \frac{2\ 5\cancel{00}}{10\ 0\cancel{00}} \Longrightarrow \frac{25}{100} \Longrightarrow$ 25%

9) Numa loja, o preço de uma mercadoria num determinado dia era R$ 125,00. No dia seguinte, houve um aumento de 20% e, uma semana depois, o lojista reduziu o preço em 15%. Calcule o preço final do produto.

Aumento: a mercadoria custava R$ 125,00,que corresponde a 100%, passando a ser 120%, então,

R$ 125 $\cdot \frac{120}{100} \Longrightarrow$ 1,25 · 120 $\Longrightarrow$ R$ 150,00.

Desconto: uma semana depois, a mercadoria que custava R$ 150,00, que corresponde a 100%, obteve um desconto de 15%, passando a 85%, então,

R$ 150 $\cdot \frac{85}{100} \Rightarrow$ 1,5 $\cdot$ 85 $\Rightarrow$ R$ 127,50.

10) Uma mercadoria sofreu dois aumentos consecutivos: o primeiro de 15% e o segundo de 20%. Calcule a porcentagem se o aumento fosse feito em uma única vez.

Sabendo que a mercadoria = 100%, 15% = 0,15 e 20% = 0,20, temos:m $\cdot$ 1,15 $\cdot$ 1,20 = m $\cdot$ 1,38, portanto o aumento final foi de 38%

Também poderíamos considerar a mercadoria custando R$ 100,00 (100%).

Assim, com o aumento de 15%, o novo preço da mercadoria passou a R$ 115,00 (100%). Aumentando novamente 20%, passou a valor 120%, que multiplicado por R$ 115,00 equivale a R$ 138,00, seu preço final e 38% como aumento final.

Exercícios:

1) Numa empresa, entre cada 150 funcionários, 30 são técnicos especializados. Calcule a porcentagem de técnicos desta empresa.

2) Um produto é comprado por R$ 145,00 e vendido por R$ 181,50. Determine:
a) a porcentagem de lucro em relação ao preço de compra;
b) a porcentagem de lucro em relação ao preço de venda.

3) Na compra de um produto, o desconto dado foi de R$ 9,60. Sabendo-se que a taxa de desconto é de 12%, qual o preço do produto e qual o valor pago por ele?

4) Num grande magazine, o preço de um eletrodoméstico é R$ 90,00 e para pagamento à vista é oferecido um desconto de 15%. Qual é o preço à vista do produto?

1) 20%	2a) 25%	2b) 20%	3) R$ 80,00 e R$ 70,40	4) R$ 76,50

Juro simples

Quando falamos de juros, estamos nos referindo a uma determinada quantia em dinheiro a ser paga por uma pessoa devedora, que necessitou de uma determinada quantia, pedindo emprestado a outra pessoa, chamada credora, oua uma instituição de crédito. Existem dois tipos de juros: simples e composto.

Estudaremos os juros simples como sendo aqueles que são acrescidos a um determinado capital inicial, no final da aplicação.

Exemplo para dedução da fórmula:

1) Uma pessoa empresta a outra, a juros simples, a quantia de R$ 4.000,00, pelo prazo de 5 meses, à taxa de 4,5% ao mês. Quanto essa pessoa deverá pagar de juros?

Capital (c): R$ 4.000,00

Taxa (i): 4,5% ao mês = $\frac{4,5}{100}$ = $\frac{45}{1000}$

Tempo (t): 5 meses.

Fazendo o cálculo, mês a mês, teremos: R$ 2.$\cancel{000} \cdot \frac{45}{1\cancel{000}}$ = 2 $\cdot$ 45 = 90 (1º mês);

ao final do 2º mês 180 (90 + 90 180);
do 3º mês 270 (180 + 90 = 270);
do 4º mês 360 (270 + 90 = 360), e
do 5º mês 450 (360 + 90 =450).

No final, a pessoa devedora estará pagando R$ 450,00 de juros.

Por dedução, baseado nos cálculos realizados, teremos:

1º mês: $j = i \cdot C$
2º mês: $j = i \cdot C + i \cdot C$
3º mês: $j = i \cdot C + i \cdot C + i \cdot C$
4º mês $j = i \cdot C + i \cdot C + i \cdot C + i \cdot C$
5º mês: $j = i \cdot C + i \cdot C + i \cdot C + i \cdot C + i \cdot C$

No final do período de empréstimo (t), os juros serão: $i \cdot C + i \cdot C + i \cdot C + i \cdot C + i \cdot C$

Genericamente: $j = \underbrace{i \cdot C + i \cdot C + i \cdot C + i \cdot C + i \cdot C + ... + i \cdot C}_{t}$

Portanto, a expressão será: **$j = C \cdot i \cdot t$** ou **$j = \frac{C \cdot i \cdot t}{100}$**

Observações:

- a taxa (i) e o tempo (t) deverão ser expressos na mesma unidade;
- na fórmula, a taxa (i) deve ser expressa na forma decimal;
- chamamos de montante (M) a soma do capital com o juro (M = C + j);
- podemos notar que na fórmula $j = C \cdot i \cdot t$ são apresentadas quatro variáveis. Se três delas forem conhecidas, podemos calcular a quarta.

Exemplos:

1) Um aplicador ganhou R$ 2.100,00 de juros simples, no final de 7 meses, à taxa de 24% ao ano. Calcule o capital aplicado.

j = R$ 2.100,00
i = 24% ao ano
(24 : 12 = 2% ao mês)
t = 7 meses
C = ?
Como: $j = C \cdot i \cdot t$
$2.100 = C \cdot 0{,}02 \cdot 7$
$2.100 = 0{,}14 \cdot C$
$\frac{2.100}{0{,}14} = C$ = R$ 15.000,00

2) Uma pessoa tem R$ 10.000,00 aplicados a juros simples. A taxa é de 36% ao ano. Calcule o tempo necessário para que o montante seja de R$ 20.800,00.

C = R$ 10.000,00
i = 36% a.a. = 0,36
M = R$ 20.800,00
j = R$ 20.800,00 – R$ 10.000,00 =
R$ 10.800,00
t = ?
Como: $j = C \cdot i \cdot t$
$10.800 = 10.000 \cdot 0{,}36 \cdot t$
$10.800 = 3.600 \cdot t$
$\frac{10.800}{3.600} = t$ = 3 anos.(taxa e tempo devem ter a mesma unidade).

3) Um capital de R$ 12.000,00 é aplicado a juros simples durante 150 dias, rendendo juros de R$ 900,00. Calcule a taxa dessa aplicação.

C = R$ 12.000,00
t = 150 dias (150 **:** 30 = 5 meses)
j = R$ 900,00
i = ?
Como: $j = C \cdot i \cdot t$
$900 = 12.000 \cdot i \cdot 5$
$900 = 60.000 \cdot t$
$\frac{900}{60.000} = i = 0{,}015$ = 1,5 ao mês taxa anual (i): $1,5 \cdot 12 = 18\%$

4) O preço à vista de um automóvel é R$ 25.000,00. A pessoa deseja comprá-lo e só dispõe de 30% para a entrada, financiando os 70% restantes em 18 meses. Determine o valor de cada prestação, sabendo que a taxa de juros simples é de 30% ao ano. Despreze os centavos no cálculo.
C = R$ 25.000,00
Entrada: $25.00\cancel{0} \cdot \frac{3\cancel{0}}{10\cancel{0}}$ = 7.500
Restante: 25.000 – 7.500 = 17.500
i = 30% ao ano
t = 18 meses (18 **:** 12 = 1,5 anos)
j = ?

Como: $j = C \cdot i \cdot t$
$j = 17.500 \cdot 0,3 \cdot 1,5$
j = 7.875
M = 17.500 + 7.875 = 25.375 (montante)
25.375 **:** 18 = 1.409,00 será o valor de cada prestação

5) Um capital de R$ 5.000,00 é aplicado a juros simples. Calcule os juros correspondentes, quando:
a) i = 4% a.m. e t = 8 meses
j = ?
C = R$ 5.000,00
i = 4% a.m.
t = 8 meses
Como: $j = C \cdot i \cdot t$
$j = 5.000 \cdot 0,04 \cdot 8$
j = 1.600

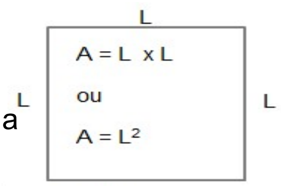
Exercícios:
1) Durante quanto tempo deve-se deixar aplicado o capital de R$ 25.000,00, à taxa de 12% ao ano, para que produza juros de R$ 4.000,00?

2) Qual deve ser o capital aplicado, a juros simples, durante 1 ano e 6 meses, à taxa de 0,15% ao dia, para que produza juros de R$ 6.723,00?

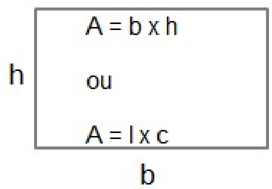
3) Um capital de R$ 5.000,00 é aplicado a juros simples, à taxa de 4% a.m. durante 8 meses. Calcule os juros da aplicação.

1) 1 ano e 4 meses	2) R$ 8.300,00	3) R$ 1.600,00

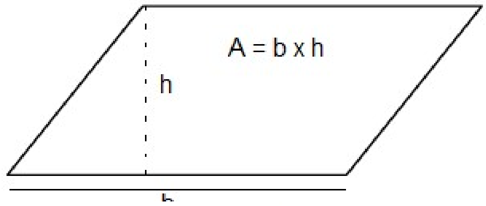
Geometria plana
O estudo da geometria plana, também chamada de elementar ou Euclidiana, iniciou na Grécia antiga. Caracterizou-se pela análise das diferentes formas dos objetos alicerçada em três conceitos básicos ou primitivos: ponto, reta e plano. O significado etimológico da palavra geometria está em: *geo* = terra e *metria* = medida, descrita então como a medida da terra.
Vamos retomar os principais assuntos da geometria plana, os quais já foram vistos no ensino fundamental.



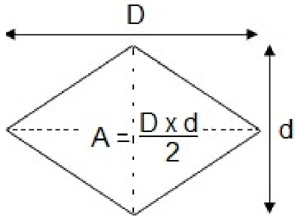
Área das principais figuras planas
- Quadrado.Polígono de quatro lados iguais, o quadrado ou quadrilátero é uma figura geométrica plana que possui os quatro ângulos congruentes: retos (90°).



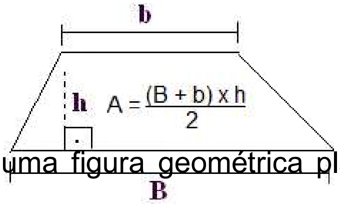
- Retângulo.Figura geométrica plana marcada por dois lados paralelos no sentido vertical e os outros dois paralelos, no horizontal. Assim, todos os lados do retângulo formam ângulos retos (90°).



- Paralelogramo.Oparalelogramo é uma figura plana que possui quatro lados. Ele faz parte dos estudosda geometria plana, sendo um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos.
Em outras palavras, os paralelogramos são polígonos de quatro lados opostos congruentes (que possuem a mesma medida), por exemplo, o quadrado, o losango e o retângulo.



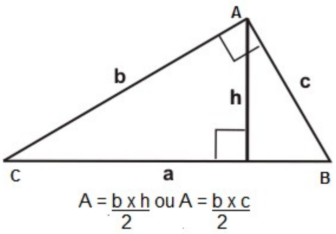
- Losango.Quadrilátero equilátero, ou seja, formado por quatro lados iguais, o losango, junto com o quadrado e o retângulo, é considerado um paralelogramo.
Ou seja, é um polígono de quatro lados, os quais possuem lados e ângulos opostos congruentes e paralelos.

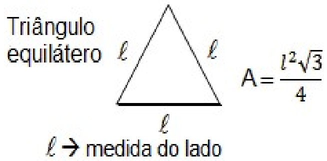


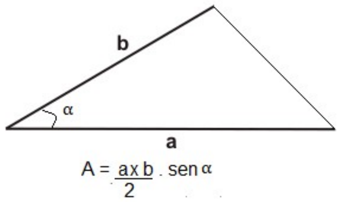
- Trapézio.Chamado de quadrilátero notável, pois a somados seus ângulos internos corresponde a 360º, o trapézio é uma figura geométrica plana. Ele possui dois lados e bases paralelas, donde uma é maior e outra menor.

- Triângulo.Polígono (figura plana fechada) de três lados, o triângulo é uma figura geométrica plana formada por três segmentos de reta.

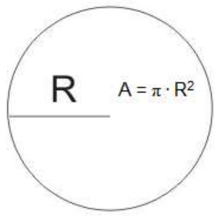
Quanto à forma, são classificados em:
- triângulo equilátero: possui todos os lados e ângulos internos iguais (60°);
- triângulo isósceles: possui dois lados e dois ângulos internos congruentes;
- triângulo escaleno: possui todos os lados e ângulos internos diferentes.

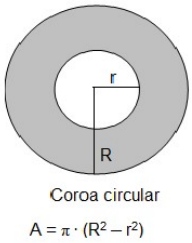


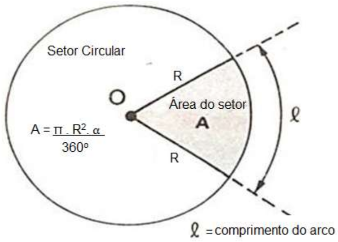




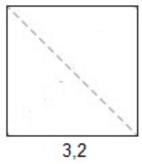
- Círculo.Figura geométrica plana caracterizada pelo conjunto de todos os pontos de um plano. O raio (r) do círculo corresponde à medida da distância entre o centro da figura até sua extremidade.



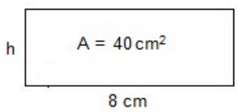




Exemplos:
1) Determinar a área de um quadrado cujo lado mede 3,2 cm.
A = L x L
A = 3,2 x 3,2
A = 10,24 cm^2



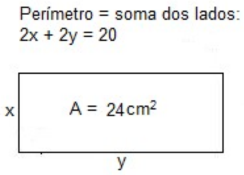
2) A área de um retângulo é 40 cm^2 e sua base mede 6 cm. Determinar a altura do retângulo.
A =b x h ⟹ 40 = 8 · h⟹
h = $\frac{40}{8}$⟹ h = 5 cm



3) Um retângulo tem 24 cm^2 de área e 20 cm de perímetro. Determine suas dimensões.

$A = b \cdot h \Rightarrow A = y \cdot x \Rightarrow 24 = y \cdot x$

$P = 2x + 2y \Rightarrow 20 = 2x + 2y$



Sistema do 1º grau com duas variáveis:

$2x + 2y = 20 = x + y = 10 \Rightarrow x = 10 – y$

Substitui na 1ª equação:

$24 = y \cdot (10 – y) \Rightarrow 24 = 10y – y^2$

Equação do 2º grau: $y^2 – 10y + 24 = 0$

$\Delta = b^2 – 4ac \Rightarrow \Delta = (– 10)^2 – 4 \cdot 1 \cdot 24 \Rightarrow \Delta = 100 – 96 \Rightarrow \Delta = 4$

Aplicando Bhaskara:

$y = \frac{-(-10) \pm \sqrt{4}}{2 . 1} \Rightarrow y = \frac{10 \pm 2}{2} \Rightarrow$

$y' = \frac{12}{2} \Rightarrow y' = 6$ cm

$y'' = \frac{8}{2} \Rightarrow y'' = 4$ cm

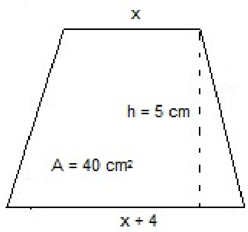
Sendo y = 6 ou y = 4

$24 = y \cdot x \Rightarrow 24 = 6 \cdot x \Rightarrow \frac{24}{6} = x = 4$ cm

$24 = y \cdot x \Rightarrow 24 = 4 \cdot x \Rightarrow \frac{24}{4} = x = 6$ cm

4) Uma das bases de umtrapézio excede a outra de 4 cm. Determinar as medidas das bases desse trapézio sendo 40 cm^2 a área do trapézio e 5 cm a altura.

$A = \frac{(B + b).h}{2} \Rightarrow 40 = \frac{[(x + 4) + x)] . 5}{2} \Rightarrow$



$40 = \frac{[2x + 4] . 5}{2} \Rightarrow 40 = \frac{10x + 20}{2} \Rightarrow$

$80 = 10x + 20 \Rightarrow 80 – 20 = 10x \Rightarrow$

$60 = 10x \Rightarrow \frac{60}{10} = x = 6$ cm, então:

$x + 4 = 6 + 4 = 10$ cm

$x = 6$ cm

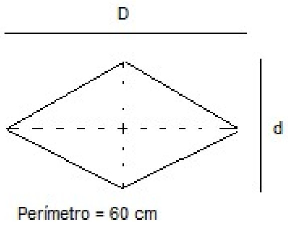
5) O perímetro de um losango é de 60 cm. Calcule a medida de sua área, sabendo que a diagonal maior vale o triplo da menor.

$D = 3x$

$d = x$

$P = 60$ cm

$60 : 4 = 15$ cm cada lado



Aplicando Teorema de Pitágoras:

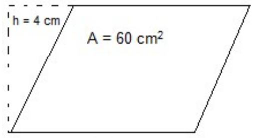
$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 15^2 = \left(\frac{3x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$225 = \frac{9x^2}{4} + \frac{x^2}{4} \Rightarrow 225 = \frac{10x^2}{4} \Rightarrow 900 = 10x^2 \Rightarrow 90 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{90}$

Aplicando a fórmula da área:

A = $\frac{D\,.\,d}{2}$ ⟹ A = $\frac{3\sqrt{90}\,.\,\sqrt{90}}{2}$ ⟹ A = $\frac{270}{2}$ ⟹ A = 135 cm^2

6) Calcular a medida da base de um paralelogramo sabendo que sua área é 60 cm^2 e sua altura mede 4 cm.



A = b . h ⟹ 60 = b . 4 ⟹ $\frac{60}{4}$ = b ⟹

b = 15 cm

7) A razão entre a base e a altura de um triângulo é $\frac{8}{5}$. Sendo 52 cm a soma da base com a altura, determine a área do triângulo.

Razão: $\frac{b}{h} = \frac{8}{5}$ ⟹ 5b = 8h ⟹ b = $\frac{8h}{5}$

b + h = 52 ⟹ $\frac{8h}{5}$ + h = 52 ⟹ 8h + 5h = 260 ⟹ 13h = 260 ⟹ h = $\frac{260}{13}$ ⟹ h = 20 cm

b = $\frac{8h}{5}$ ⟹ b = $\frac{8\,.\,20}{5}$ ⟹ b = 32 cm

Então:

A = $\frac{b\,.\,h}{2}$ ⟹ A = $\frac{32\,.\,20}{2}$ ⟹ A = 320 cm^2

8) Determine a área de um círculo sabendo que o comprimento de sua circunferência é igual a 8 π cm.

Como comprimento de uma círcunfência é C = 2πr, temos:

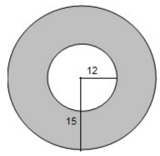
8π = 2πr ⟹ $\frac{8\pi}{2\pi}$ = r ⟹ r = 4 cm.

Sabendo que a área do círculo é A = πr^2, temos:

A = $\pi 4^2$ ⟹ A = 16 π cm^2

9) Determine a área da coroa determinanda por duas circunferências concêntricas de raios 15 cm e 12 cm.

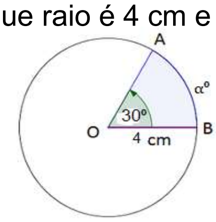
A = π · ($R^2 - r^2$) ⟹ A = π · ($15^2 - 12^2$) ⟹ A = π · (225 – 144) ⟹ A = π · 81 ⟹ A = 81π cm^2



10) Calcular a área do setor circular, sabendo que raio é 4 cm e o α = 30º. (use π = 3,14).

A = $\frac{\pi\,.\,r^2\,.\,\alpha}{360^o}$ ⟹ A = $\frac{3{,}14\,.\,4^2\,.\,30^o}{360^o}$ ⟹

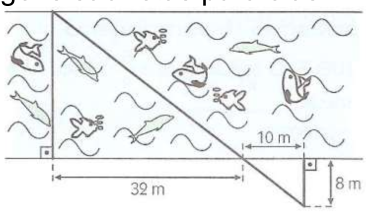
A = $\frac{3{,}14\,.\,16}{12}$ ⟹ A = $\frac{50{,}24}{12}$ ⟹ A = 4,18 cm^2



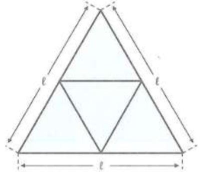
Exercícios:

1) (UFPE) A figura representa um rio cujas margens são retas paralelas.

Qual a distância entre as margens?



2) (UFPE) Considere um triângulo equilátero de lado ℓ como na figura. Unindo-se os pontos médios dos seus lados obtemos 4 (quatro) novos triângulos. O perímetro de qualquer um desses quatro triângulos é igual a:



A) $\frac{5\ell}{2}$

B) ℓ

C) 3ℓ

D) $\frac{\ell}{2}$

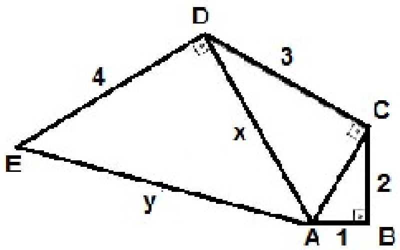
E) $\frac{3\ell}{2}$

3) Em um trapézio retângulo, o menor ângulo mede 35º. O maior ângulo desse polígono mede:

A) 155º B) 150º C) 145º D) 142º E) 140º

4) (Vunesp) A área de um triângulo retângulo é 12 dm^2. Se um dos catetos é $\frac{2}{3}$ do outro, calcule a medida da hipotenusa desse triângulo.

5) (FEI-SP) Na figura, o valor de $x^2 + y^2$ é:

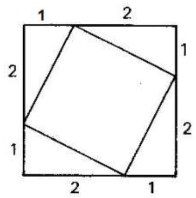


A) 18
B) 24
C) 36
D) 44
E) 54

6) (Fuvest) A sombra de um poste vertical, projetada pelo sol sobre o chão plano, mede 12 m. Nesse mesmo instante, a sombra de um bastão vertical de 1 m de altura mede 0,6 m. A altura do poste é:

A) 6 m B) 7,2 m C) 12 m D) 20 m E) 72 m

7) Na figura, qual é a área do quadrado menor:

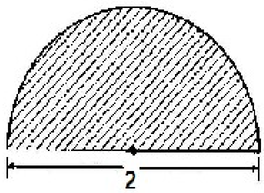


A) 5
B) 6
C) 7
D) 8
E) 9

8) Um campo retangular tem comprimento igual ao dobro da largura e é cercado por uma cerca de x metros. Podemos afirmar que a área dessecampo é:

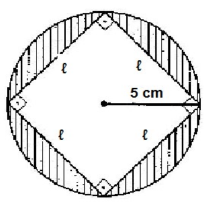
A) $\frac{x^2}{2}$ B) $2x^2$ C) $\frac{2x^2}{9}$ D) $\frac{x^2}{18}$ E) $\frac{x}{2}$

9) A área do semicírculo da figura é:



A) 2π
B) $\frac{\pi}{2}$
C) $\frac{4}{5}$π
D) $\frac{2}{3}$π
E) π

10) A área da figura sombreada, em cm^2, é:



A) 100
B) 25(π – 2)
C) 100π
D) 25

E) 25π

1) 25,6 m	2) E	3) C	4) $2\sqrt{13}$ dm	5) D	6) D	7) A	8) D	9) B	10) B

Exercícios:

1) Determine o número de vértices de um poliedro convexo de 12 faces e 30 arestas.

2) Determine o número de vértices e arestas de um poliedro convexo de 9 faces, das quais 4 são triangulares e 5 são quadrangulares.

3) Determine o número de faces de um poliedro convexo de 6 vértices. Sabe-se que de cada vértice partem 4 arestas.

4) Determine o número de vértices de um poliedro convexo formado por 92 faces, sendo 12 faces pentagonais e 80 faces triangulares.

5) Num poliedro convexo de 10 arestas, o número de faces é igual ao número de vértices. Quantas faces tem esse poliedro?

6) (UFPA) Num poliedro convexo, o número de faces é 6 e o número de vértices é 8. Então o número de arestas é:
A) 8 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

1) 20	2) V=9 A = 16	3) 8	4) 60	5) 6	6) C

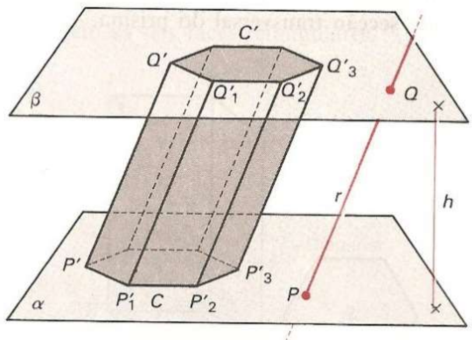
Geometria espacial

É definida como um espaço com três dimensões, tendo como objetivo analisar as figuras tridimensionais e, por meio delas, calcular o volume de um sólido.

Vamos analisar as principais figuras geométricas calculando suas áreas e volumes.

Prismas

Prisma é a região do espaço limitada por todos os segmentos congruentes ao segmento *PQ* e paralelos à área *r*, com extremidade no polígono *C* e no plano β.



Elementos de um prisma:

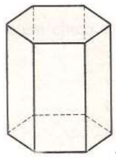
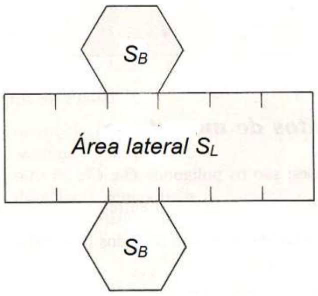
- base: são os polígonos *C* e *C'*.
- altura: é a distância h entre os planos α e β.
- aresta da base: são os lados do polígono *C* e *C*'.

Em C: $\overline{P'P_1'}$, $\overline{P'P_2'}$, ...

Em C': $\overline{Q'Q_1'}$, $\overline{Q'Q_2'}$, ...

- arestas laterais: são os segmentos $\overline{P'Q'}$, $\overline{P_1'Q_1'}$, ...
- faces lateriais: são os paralelogramos P'Q'$Q_1'P_1'$, $P_1'Q_1'Q_2'P_2'$, ...

Área de um prisma

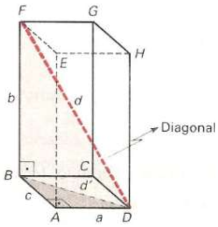
Área da base (S_B): corresponde à área do polígono da base.
Área lateral (S_L): é a soma das áreas das faces laterais.
Área total (S_T): é a soma da área lateral com a área das bases, assim temos: $\mathbf{S_T = 2S_B + S_L}$
Volume do prisma

O volume de qualquer prisma é dado por:

Onde:
S_B = área da base; e h é a altura.
Então: $\mathbf{V = S_B \cdot h}$

Paralelepípedos

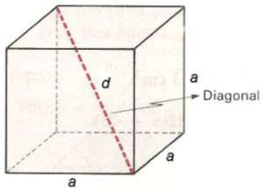
Todos os prismas cujas faces são paralelogramos são denominados papalelepípedos.



Volume: $\mathbf{V = a \cdot b \cdot c}$
Área total: $\mathbf{S_T = 2ab + 2ac + 2bc}$ ou
$\mathbf{S_T = 2(ab + bc + bc)}$
Diagonal: é a distância entre dois vértices de faces distintas, representada na figura pelos triângulos ABD e DBF. Quando aplicado o teorema de Pitágoras nos dois triangulos, temos que:
$\mathbf{d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Cubo

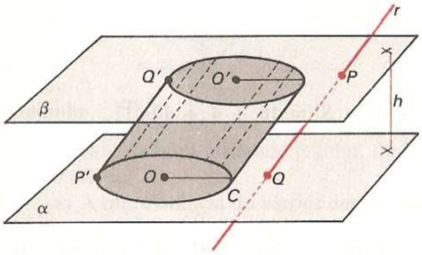
Tem as seis faces quadradas.



Volume: $\mathbf{V = a^3}$
Área total: $\mathbf{S_T = 6 \cdot a^2}$
Diagonal: como as arestas são iguais, então: $\mathbf{d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} \Rightarrow d = \sqrt{3a^2} \Rightarrow d = a\sqrt{3}}$

Cilindros

É a região do espaço limitado pelos segmentos congruentes ao segmento $\overline{PQ}$ e paralelos à reta ***r***, com extremidades no polígono *C* e no plano β.



Elementos de um cilindro:

- eixo: é o segmento $\overline{OO'}$, cujas extremidades são os centros dos círculos;

- altura (*h*): é a distância entre os planos que contêm as bases;

- geratriz (*g*): são os segmentosparalelos à direção da reta ***r***, cujos extremos estão na circunferência.
Área de um cilindro

A planificação de um cilindro reto de base com raio *R* e altura *h*, pode ser visto na figura:
- área da base: é a área do círculo de raio *R*, expressa por: $\mathbf{S_B = \pi R^2}$
- área lateral: é a área do retângulo de lados 2π*R* e *h*, expressa por: $\mathbf{S_L = 2\pi R \cdot h}$
- área total: é a soma das áreas da base e a área lateral, expressa por: $\mathbf{S_T = 2\pi R \cdot (R + h)}$

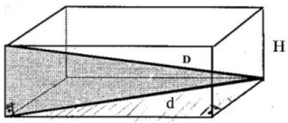
Volume de um cilindro

Num cilindro qualquer, de raio *R* e altura *h*, o volume é expresso por: $\mathbf{V = 2\pi R^2 \cdot h}$

$$\mathbf{S_T = \pi R \cdot (R + g)}$$

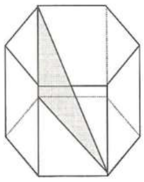
Exercícios:

1) Um prisma reto retangular tem a sua diagonal medindo 4 e os lados da base, 2 e 3. Calcular as suas áreas lateral e total.



2) Um prisma hexagonal reto regular tem a sua base inscrita em um círculo de área 9π. A sua maior diagonal mede 8. Calcular o seu volume.

A) $22\sqrt{7}$
B) $21\sqrt{27}$
C) $27\sqrt{7}$
D) $27\sqrt{21}$
E) $29\sqrt{21}$

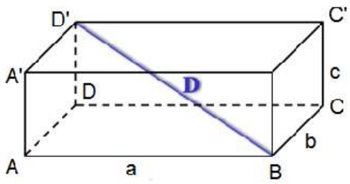


hexágono da base

3) Um prisma quadrangular regular tem aresta da base a = 5 dm e altura h = 10 dm. Determine o seu volume.

4) No paralelepípedo reto-retângulo de dimensões *a*, *b* e *c*, a diagonal $\overline{BD'}$ é dada pela fórmula:

A) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
B) $\sqrt{a_2^2 - b^2 - c^2}$
C) $\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$
D) $\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$
E) $\sqrt{2a^2 - 2b^2 - 2c^2}$



5) Determine a medida da diagonal de um paralelepípedo retângulo cujas arestas medem 2 cm, 7 cm e 3 cm.

6) As medidas internas de uma caixad'águaem forma de paralelepípedo retângulo são: 1,2 m, 1,0 m e 0,7 m. Sua capacidade é de:

A) 8 400 litros B) 84 litros C) 840 litros D) 8,4 litros E) 0,84 litros

7) Determine a medida da diagonal de um cubo de 5 cm de aresta.

8) Determine o volume de um cubo que tem 96 m^2 de área total.

9) O número que expressa a área total de um cubo, em cm^2, é o mesmo que expressa seu volume, em cm^3. Qual o comprimento, em cm, de cada uma das arestas desse cubo?

A) 9 B) 6 C) 4 D) 2 E) 1

10) Calcular a medida da diagonale a área total de um cubo, cuja soma das medidas das arestas vale 30 cm.

11) Aumentando-se a medida da diagonal de um cubo em 5 cm, a sua área total aumentará de 110 cm^2. Determinar a medida de sua diagonal.

12) Uma pirâmide regular de base quadrada possui aresta da base a = 6 cm e aresta lateral $a_L = \sqrt{34}$ cm. Determine sua área total e seu volume.

13) Qual o volume de uma pirâmide regular de altura igual a $2\sqrt{3}$ dm e base triangular de perímetro 6 dm?

14) Operímetro da base de uma pirâmide hexagonal regular é 24 m, e a altura, 6 m. O volume dessa pirâmide mede:
A) $12\sqrt{3}$ m^3 B) $26\sqrt{3}$ m^3 C) $39\sqrt{3}$ m^3 D) $48\sqrt{3}$ m^3 E) $60\sqrt{3}$ m^3

15) Uma pirâmide regular, cuja base é um quadrado de diagonal $6\sqrt{6}$ cm e a altura é igual a $\frac{2}{3}$ do lado da base, tem área total igual a:
A) $96\sqrt{3}$ cm^2 B) 252 cm^2 C) 288 cm^2 D) $84\sqrt{3}$ cm^2 E) 576 cm^2

16) Calcule a área total e o volume de umcilindro que tem raio da base r = 1 cm e altura h = 2 cm.

17) Determine a área total de um cilindro equilátero que possui volume igual a 128π cm^3.
18) Calcular a área lateral, a área total e o volume de um cilindro equilátero de raio igual a *r*.

19) Determinar o volume de um cilindro reto, sabendo que a área de sua base é igual a sua área lateral, e a altura igual a 12 m.

20) O volume de um cone circular reto é 27π dm^3 e a altura é 9 dm. O raio da base é:
A) 4 dm B) 9 dm C) 2 dm D) 5 dm E) 3 dm

21) Uma ampulheta pode ser considerada como formada por 2 cones retos idênticos, unidos pelo vértice, inscritos em um cilindro reto. A razão entre o volume de um dos cones e o volume do cilindro é:
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{8}$

22) O círculo máximo de uma esfera mede 6π cm. Qual o volume da esfera?
A) 12π cm^3 B) 24π cm^3 C) 36π cm^3 D) 72π cm^3 E) 144π cm^3

23) Uma esfera de volume 36π está inscrita em um cilindro de volume igual a:
A) 9π B) 18π C) 24π D) 54π E) 60π

24) Determinar o volume de uma esfera cuja área da superfície mede 36π m^2.

25) O raio de uma esfera mede 4 cm. Determine o raio de uma outra esfera cuja área da superfície esférica seja o triplo da primeira.
26) Um cone reto de 64 cm de altura está inscrito em uma esfera de 50 cm de raio. O raio da base do cone é, em cm:
A) 50 B) 48 C) 32 D) 64 E) 86

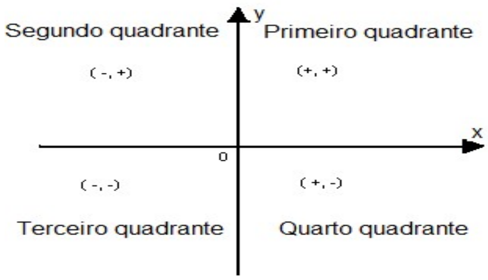
1) $A_L = 10\sqrt{3}$ $A_T = 10\sqrt{3} + 12$	2) D	3) $V = 250\ dm^3$	4) A	5)$d = \sqrt{62}$ cm	6) C	7)$d = 5\sqrt{3}$ cm
8)$V = 64\ m^3$	9) B	10) $d = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ $A_T = 37,5\ cm^2$	11) d = 3 cm	12) $A_T = 96\ cm^2$ $V = 48\ cm^3$	13) D	14) D
15) C	16)$A_T = 6\pi\ cm^2$ $V = 2\pi\ cm^3$	17)$A = 96\pi\ cm^2$	18) $A_L = 4\pi r^2$ $A_T = 6\pi r^2$ $V = 2\pi r^3$	19) $V = 6\,912\ m^3$	20) E	21) D
22) C	23) D	24)$V = 36\pi\ cm^3$	25) $R = 4\sqrt{3}$ cm	26) B		

Geometria analítica

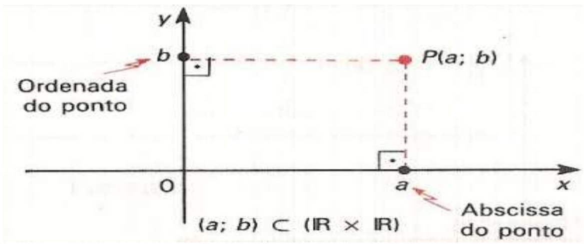
A relação entre a álgebra e a geometria desenvolvida por Descartes, no século XVII, possibilitou a criação de princípios matemáticos capazes de analisar por métodos geométricos as propriedades do ponto, da reta e da circunferência, determinando distâncias entre eles, localização e pontos de coordenadas.

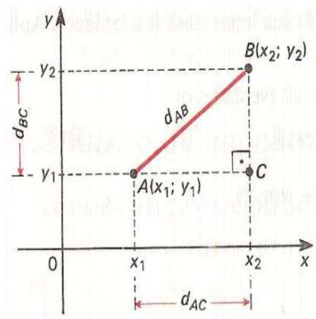
Sistema cartesiano ortogonal

Já foi visto anteriormente que o sistema cartesiano orotogonal é formado por duas retas perpendiculares, *x* na horizontal e *y* na vertical, no ponto de origem *O*, determinando o plano α, ficando determinado os quatro quadrantes numerados no sentido anti-horário.



Existe uma correpondência biunívoca entre os pontos de um plano e os pares de números reais (a; b). Portanto, todo par ordenado de números reais corresponde a um ponto *P*no plano cartesiano.





Distância entre dois pontos

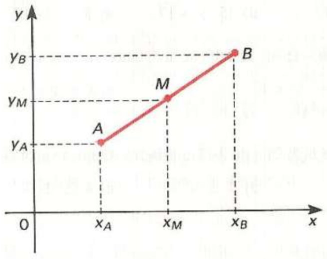
Sendo $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$ dois pontos do plano cartesiano, podemos observar que a distância entre *B* e *C* é igual à diferença entre y_2 e y_1 e que a distância entre *A* e *C* é a diferença entre x_2 e x_1, ou seja:

$d_{BC} = y_2 - y_1$ e $d_{AC} = x_2 - x_1$

Utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, obtemos:
$d_{AB}^2 = d_{AC}^2 + d_{BC}^2 \Longrightarrow$
$d_{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, assim, podemos expressar a distância entre dois pontos como sendo:

$$\mathbf{d_{AB}} = \sqrt{(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})^2 + (\mathbf{y_2} - \mathbf{y_1})^2}$$

Ponto médio de um segmento de reta



Sendo *A* e *B* dois pontos e *M* o ponto que divide *AB* ao meio. Observando na figura temos *AM*=*MB*, assim: $r = \frac{AM}{MB} = 1$.

Então, se: $x_M - x_A = x_B - x_M \Longrightarrow$
$2x_M = x_A + x_B$, teremos:

$$\boldsymbol{x_M} = \frac{x_A + x_B}{2}$$

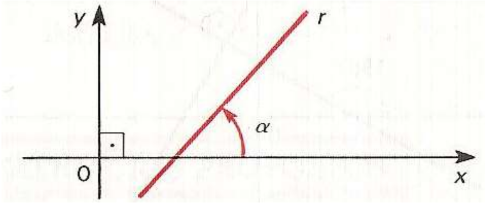
Se $y_M - y_A = y_B - y_M \Longrightarrow$
$2y_M = y_A + y_B$, teremos:

$$\boldsymbol{y_M} = \frac{y_A + y_B}{2}$$

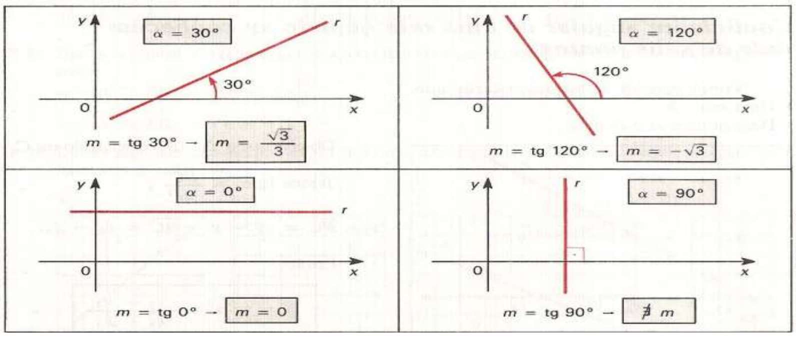
Portanto: $P_m = (x_M; y_M)$

Estudo da reta

Começamos nosso estudo denominando o coeficiente angular de uma reta *r* ao número real *m*, igual à tangente trigonométrica do ângulo α, assim: **m = tg** α



onde α é a inclinação da reta *r*, medida a partir do eixo *Ox*, no sentido anti-horário.
Exemplos:

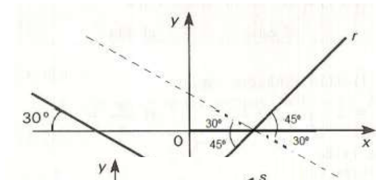


α	30°	45°	60°
tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Com o auxilio da tabela, calcule o coeficiente angular das retas r e s, nos seguintes casos:

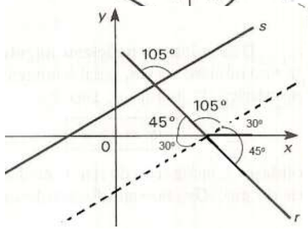
a) m = tg α⟹ m_s = tg 30º = $-\sqrt{\frac{3}{3}}$

m_r = tg α⟹ m_r = tg 45º = 1



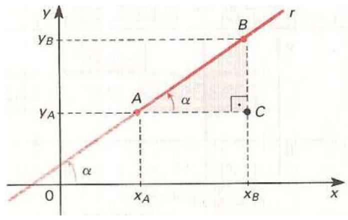
b) m = tg α⟹ m_r = tg 45º = – 1

m_r = tg α⟹ m_s = tg 30º = $\sqrt{\frac{3}{3}}$



Coeficiente angular de uma reta quando se conhecem dois de seus pontos

Demonstração no plano cartesiano, quando:
- temos uma reta *r*;
- temos dois pontos *A* e *B* que pertencem a *r*.



Podemos observar na figura que o triângulo Δ *ABC* é retângulo em *C*.

Como tg $\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$, porém,

$\overline{BC} = y_B - y_A$ e $\overline{AC} = x_B - x_A$, portanto:m = tg$\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

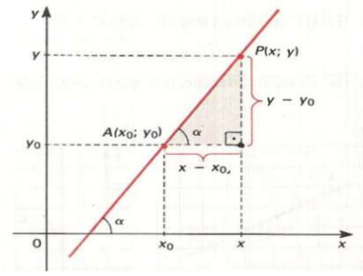
Exemplo: calcule o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos A(3; 2) e B(1; 4).

m = tg$\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m = \frac{4-2}{1-3} \Rightarrow m = -\frac{2}{2} \Rightarrow m = -1$

Equação da reta

A equação da reta é do tipo: **ax + by + c = 0**
onde a, b e c são números reais, sendo que a e b não simultameamente nulos.

A equação da reta poderá ser obtida se observadas as seguintes condições:
- Quando dado o coeficiente angular dessa reta e um ponto que a ela pertence.



Seja A(x_0; y_0) um ponto da reta e considerando P(x; y) um outro ponto dessa mesma reta, temos:

$$\text{tg}\alpha = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Portanto,**$y - y_0 = m(x - x_0)$**

Exemplo: determine a equação da reta r que passa pelo ponto (2; 5) e cujo coeficiente angular é – 2.

$y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \Rightarrow y - 5 = -2 \cdot (x - 2) \Rightarrow y - 5 = -2x + 4 \Rightarrow$

$y + 2x - 5 - 4 \Rightarrow 2x + y - 9 = 0$

- Quando passa por dois pontos pertencentes à reta.

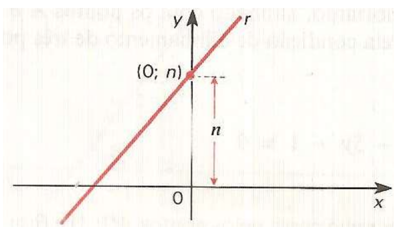
Exemplo: obtenha a equação da reta que passa pelos pontos A(1; 1) e B(6; 5).

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$x \cdot 1 \cdot 1 + y \cdot 1 \cdot 6 + 1 \cdot 1 \cdot 5 - 1 \cdot 1 \cdot 6 - x \cdot 1 \cdot 5 - y \cdot 1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$

$x + 6y + 5 - 6 - 5x - y = 0 \Rightarrow -4x + 5y - 1 = 0 \Rightarrow 4x - 5y + 1 = 0$

Coeficiente linear da reta



Chamamos coeficiente linear da reta *r* à ordenada *n* do ponto onde a reta corta o eixo *y*.

Exemplo: dada a equação x – 3y = 6, determine o coeficiente linear.

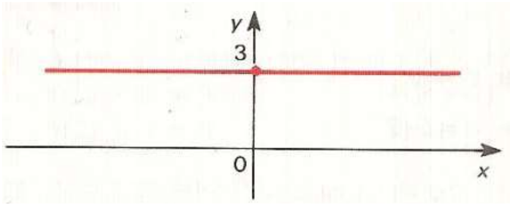
$x - 3y = 6$, sendo $x = 0$, teremos: $0 - 3y = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{-3} \Rightarrow y = -2$

Equação geral da reta

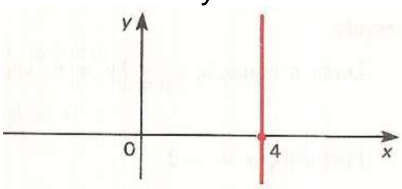
A equação geral da reta é colocada na forma *a**x* + b*y* + c = 0, com *a* e *b* não simultaneamente nulos. Podemos analisá-la de duas maneiras:
- Quando a = 0 e b ≠ 0.

Tomando **a = 0** na equação geral, teremos b*y* + c = 0, logo: b*y* = – c $\Rightarrow y = -\frac{c}{b}$

O gráfico da reta será uma paralela ao eixo *x*.

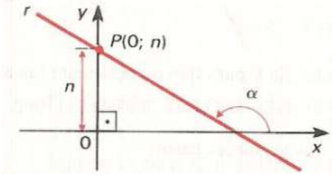


Exemplo: dada a equação $2y - 6 = 0$, temos: $2y = 6 \Rightarrow y = 3$.
- Quando $a \neq 0$ e $b = 0$.
Sendo $b = 0$ na equação geral, teremos $ax + c = 0$, logo: $ax = -c \Rightarrow x = -\frac{c}{a}$
O gráfico obtido da reta será uma paralela ao eixo *y*.



Exemplo: dada a equação $3x - 12 = 0$, temos: $3x = 12 \Rightarrow x = 4$.

Equação reduzida da reta
Sendo *P*(0; n) o ponto em que a reta *r* intercepta o eixo *y*, e m o coeficiente angular.



Na equação da reta $y - y_0 = m(x - x_0)$, substituindo $x_0 = 0$ e $y_0 = n$, teremos: $y - n = m(x - 0) \Rightarrow y - n = mx \Rightarrow$ $\boldsymbol{y = mx + n}$
Exemplos:
1) Dados m = – 1 e n = 3, coeficientes angular e linear, respectivamente, da reta. Escrever a equçação reduzida da reta. $y = mx + n \Rightarrow y = -1x + 3 \Rightarrow y = -x + 3$.

2) Dados os pontos A(– 2 ; – 4) e B(1; – 1) da reta, encontre a equação reduzida da reta.
$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x & y \\ -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4x + y + 2 + 4 + x + 2y \Rightarrow -3x + 3y + 6 = 0 :(3) \Rightarrow$
$-x + y + 2 \Rightarrow y = x - 2$

3) Dados o coeficiente angular $m = \frac{1}{2}$ e o ponto (2; – 3) da reta, escreva a equação reduzida da reta.
$y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \Rightarrow y - (-3) = \frac{1}{2} \cdot (x - 2) \Rightarrow y + 3 = \frac{x}{2} - 1 \Rightarrow y = \frac{x}{2} - 1 - 3 \Rightarrow y = \frac{x}{2} - 4$

Bibliografia
BUCCHI Paulo, Matemática Volume Único, EDITORA MODERNA 1ª EDIÇÃO 1992 SÃO PAULO
FACCHINI Walter, Matemática Volume Único, EDITORA SARAIVA 2ª EDIÇÃO 1997 SÃO PAULO
FILHO benigno barretoe **SILVA** Cláudio Xavier Da, Coleção Matemática Aula Por Aula (Volumes 1, 2 E 3), FTD 1ª EDIÇÃO 2003 SÃO PAULO
IEZZIGelson, Coleção Fundamentos Da Matemática Elementar, ATUAL EDITORA 3ª EDIÇÃO 1985 SÃO PAULO
SANTOSCarlos Alberto Marcondes dos, **GENTIL** NELSON e **GRECCO**Sérgio Emilio, Matemática Série Novo Ensino Médio Edição Completa, EDITORA ATICA 1ª EDIÇÃO 2003 SÃO PAULO
VIVEIROTania Cristina Neto G. e **CORREA** Marlene Lima Pires, MinimanualCompacto De Matematica Teoria e Prática Ensino Médio, EDITORA RIDEEL 1ª EDIÇÃO 1999 SÃO PAULO